1. Sia $\alpha \in \mathbf{R}$. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{\cosh(\alpha\, n)}$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge semplicemente per $|\alpha| > \log 2$ $\boxed{\text{B}}$: converge assolutamente per $|\alpha| > \log 2$ $\boxed{\text{C}}$: converge assolutamente per $\alpha \geq \log 2$ e semplicemente per $\alpha \leq -\log 2$ $\boxed{\text{D}}$: converge semplicemente per $\alpha \leq -\log 2$ $\boxed{\text{E}}$: semplicemente per $|\alpha| \geq \log 2$ $\boxed{\text{F}}$: converge assolutamente per $\alpha > \log 2$ e semplicemente per $\alpha < -\log 2$

---

2. La somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/4} (-1)^{n+2}\, x^{2n} \arctan x\, dx$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{1}{2}(\arctan \pi/4)^2$ $\boxed{\text{B}}$: $\arctan(1/4)$ $\boxed{\text{C}}$: $\log(1/2)$ $\boxed{\text{D}}$: $\sin(1/2)$ $\boxed{\text{E}}$: $(1/2)\log(1/2)$ $\boxed{\text{F}}$: $1/4$

---

3. La serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=7}^{+\infty} n^7 \sin(x\, 2^{-n})$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge uniformemente ma non totalmente in $[-\pi/4, \pi/2]$ $\boxed{\text{B}}$: converge solo puntualmente in $[-\pi/2, \pi/4]$ $\boxed{\text{C}}$: converge totalmente solo in $[-\pi/4, \pi/2]$ $\boxed{\text{D}}$: converge solo puntualmente in $[-\pi/4, \pi/2]$ $\boxed{\text{E}}$: converge uniformemente ma non totalmente in $[-\pi/2, \pi/4]$ $\boxed{\text{F}}$: converge totalmente in $[-\pi/2, \pi/2]$

---

4. Sia $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ la successione di funzioni definita da $f_n(x) = \dfrac{nx - x^n}{2\, n}$, $x \in [0,1]$. Siano $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ e $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ i limiti puntuali di f_n e f_n', rispettivamente. Delle seguenti affermazioni

(a) $\{f_n\}$ converge a f solo puntualmente in $[0,1]$ (b) $\{f_n\}$ converge a f uniformemente in $[0,1]$ (c) $\{f_n'\}$ converge a g solo puntualmente in $[0,1]$ (d) $\{f_n'\}$ converge a g uniformemente in $[0,1]$ (e) $f'(x) = g(x)$ $\forall x \in [0,1]$ (f) $\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: b c $\boxed{\text{B}}$: b e f $\boxed{\text{C}}$: a d e $\boxed{\text{D}}$: a c f $\boxed{\text{E}}$: b c f $\boxed{\text{F}}$: a d e f

---

5. Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \sin(2x) & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ estesa per periodicità in $\mathbf{R}$. Delle seguenti affermazioni

(a) la sua serie di Fourier converge uniformemente in $\mathbf{R}$ (b) la sua serie di Fourier converge in media quadratica su $[-\pi, \pi]$ (c) la serie delle derivate converge in media quadratica su $[-\pi, \pi]$ (d) $a_2 = \frac{2}{\pi}$ (e) la sua serie di Fourier è derivabile termine a termine su $[-\pi, \pi]$ e la serie delle derivate converge a f' su $[-\pi, \pi]$ (f) la sua serie di Fourier converge a $\frac{1}{2}$ in $x = \frac{\pi}{4}$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: a b c $\boxed{\text{B}}$: a b d $\boxed{\text{C}}$: a e f $\boxed{\text{D}}$: b c d $\boxed{\text{E}}$: c e $\boxed{\text{F}}$: a b c f

---

6. Sapendo che $\mathcal{F}[e^{-|x|}](\xi) = \dfrac{2}{1 + 4\pi^2\xi^2}$ (dove $\mathcal{F}[u(x)](\xi)$ indica la trasformata di Fourier $\mathcal{F}[u(x)](\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{-2\pi i \xi x}\, dx$ della funzione $u(x)$, $x \in \mathbf{R}$), calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx$.

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: π $\boxed{\text{B}}$: π^2 $\boxed{\text{C}}$: $\pi/2$ $\boxed{\text{D}}$: $\pi/4$ $\boxed{\text{E}}$: 2π $\boxed{\text{F}}$: $\pi^2/2$

---

7. L'antitrasformata di Laplace di $\mathcal{L}[u(x)](p) = \dfrac{2}{(p^2+1)(p-1)^2}$ è

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $u(x) = (\sin x + \cos(2x) + e^x) H(x)$ $\boxed{\text{B}}$: $u(x) = (\sin x + \cos x - x e^x) H(x)$ $\boxed{\text{C}}$: $u(x) = (\sin^2 x - e^x + x) H(x)$ $\boxed{\text{D}}$: $u(x) = (e^{2x} + \sin x - x e^{-x}) H(x)$ $\boxed{\text{E}}$: $u(x) = (\cos x - e^x + x e^x) H(x)$ $\boxed{\text{F}}$: $u(x) = (\sinh x + x \cosh x) H(x)$

---

8. Sia dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y'(t) = (1 + y(t)) \log(1 + y(t)) \\ y(t_0) = y_0\,. \end{cases}$ Delle seguenti affermazioni

(a) per ogni $(t_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ esiste un'unica soluzione (b) per $t_0 = 0$, $0 < y_0 < 1$, si ha $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$ (c) per $t_0 = 0$, $-1 < y_0 < 0$, si ha $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = -1$ (d) per $y_0 > 0$, $y(t)$ ha un punto di minimo in $t = 0$ (e) per $-1 < y_0 < 0$, $y(t)$ ha un unico punto di flesso (f) per $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, si ha $y(1) = 2^e - 1$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{A}$: a c e $\boxed{B}$: e f $\boxed{C}$: d e f $\boxed{D}$: c e f $\boxed{E}$: b c e $\boxed{F}$: a c d

---

. . . .

Cognome e nome — Firma

ANALISI MATEMATICA C — 19 dicembre 2003 — Compito 1

Istruzioni. 1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, riportare cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande riportate nel foglio allegato; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta $= +4$; risposta sbagliata $= -1$; risposta non data $= 0$.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE solo questo foglio.
6. TEMPO a disposizione: 90 min.

Risposte relative al foglio allegato.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F