1. Sia $\alpha \in \mathbf{R}$. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\Big(\log(1+n^{2\alpha})-\log n^{2\alpha}\Big)$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge assolutamente per $\alpha \geq 1$ e semplicemente per $0 < \alpha < 1$ $\boxed{\text{B}}$: converge assolutamente per $\alpha \geq 1/2$ e semplicemente per $-1/2 < \alpha < 1/2$ $\boxed{\text{C}}$: converge assolutamente per $\alpha \geq 0$ e semplicemente per $\alpha < 0$ $\boxed{\text{D}}$: converge assolutamente per $\alpha > 1/4$ e semplicemente per $1/8 < \alpha \leq 1/4$ $\boxed{\text{E}}$: converge assolutamente per $\alpha > 1/4$ e semplicemente per $0 < \alpha \leq 1/4$ $\boxed{\text{F}}$: converge assolutamente per $\alpha > 1/2$ e semplicemente per $0 < \alpha \leq 1/2$

---

2. La somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{e^{2nx}}$, $x > 0$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^3}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{e^{x}}{(e^{2x}+1)^2}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{2x+1}{e^{2x}-1}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{2e^{2x}}{(2x-1)^2}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{2x}{(e^{2x}+1)^3}$

---

3. Per quali $x \in \mathbf{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\,x^{2n}+\frac{1}{n\log^2 n}\,(x-2)^{2n}\right)$ è convergente?

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $x \in]1,\sqrt{e}[$ $\boxed{\text{B}}$: $x \in [1,\sqrt{e}[$ $\boxed{\text{C}}$: $x \in]-\sqrt{e},\sqrt{e}[$ $\boxed{\text{D}}$: $x \in [1,3]$ $\boxed{\text{E}}$: $x \in [\sqrt{e},3]$ $\boxed{\text{F}}$: $x \in]-\sqrt{e},1]$

---

4. Sia $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ la successione di funzioni definita da $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\log(n^2x^2+1)$, $x \in [-1,1]$. Delle seguenti affermazioni

(a) $\{f_n\}$ converge a 0 puntualmente in $[-1,1]$ (b) $\{f_n\}$ converge a 0 uniformemente in $[-1,1]$ (c) esiste $g : [-1,1] \to \mathbf{R}$ tale che $\{f_n'\}$ converge a g puntualmente in $[-1,1]$ (d) esiste $g : [-1,1] \to \mathbf{R}$ tale che $\{f_n'\}$ converge a g uniformemente in $[-1,1]$ (e) $\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx = 1$ le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: a c d e $\boxed{\text{B}}$: a b c d $\boxed{\text{C}}$: a c $\boxed{\text{D}}$: b d e $\boxed{\text{E}}$: a b c $\boxed{\text{F}}$: a e

---

5. Sia $f : [-\pi,\pi] \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x)=\begin{cases}\sin^2 x\cos x & \text{se } 0<x<\pi\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$ estesa per periodicità in $\mathbf{R}$. Delle seguenti affermazioni

(a) la sua serie di Fourier converge a f uniformemente in $\mathbf{R}$ (b) la sua serie di Fourier converge a f in media quadratica in $[-\pi,\pi]$ (c) la serie delle derivate converge a f' uniformemente in $[-\pi,\pi]$ (d) la serie delle derivate converge a f' in media quadratica in $]-\pi,\pi[$ (e) la sua serie di Fourier è derivabile termine a termine in $]-\pi,\pi[$ ma non in $[-\pi,\pi]$ (f) $b_n = 0\ \forall n \in \mathbf{N}$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: a b c d $\boxed{\text{B}}$: a b d $\boxed{\text{C}}$: b c d $\boxed{\text{D}}$: d e f $\boxed{\text{E}}$: a b e f $\boxed{\text{F}}$: a c e

---

6. Sia $\alpha \in \mathbf{R}$. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x\ \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}\ (e^x-1)^\alpha}\,dx$ converge se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $0 < \alpha \leq 5/2$ $\boxed{\text{B}}$: $1 \leq \alpha < 2$ $\boxed{\text{C}}$: $0 \leq \alpha < 5/2$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha < 5/2$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha > 0$ $\boxed{\text{F}}$: $1 < \alpha \leq 2$

---

7. La trasformata di Laplace della soluzione del seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y''-y=\frac{3}{2}x^2\sinh x\\ y(0)=0\\ y'(0)=0\end{cases}$ è

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\mathcal{L}[y](p) = \frac{3p}{(p-1)^3}$ $\boxed{\text{B}}$: $\mathcal{L}[y](p) = \frac{3(p^2+1)}{(p^2-1)(p+1)^2}$ $\boxed{\text{C}}$: $\mathcal{L}[y](p) = \frac{p^2+3}{(p^2-1)^3}$ $\boxed{\text{D}}$: $\mathcal{L}[y](p) = \frac{3p}{(p+1)^2(p-1)^3}$ $\boxed{\text{E}}$: $\mathcal{L}[y](p) = \frac{3(3p^2+1)}{(p^2-1)^4}$ $\boxed{\text{F}}$: $\mathcal{L}[y](p) = \frac{3(3p^2+2)}{(p^2-1)^4(p+1)^2}$

---

8. Sia $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $u(x)=\begin{cases}\cos x & \text{se } |x|\leq\pi\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$ Sapendo che $\mathcal{F}[u](\xi)=\dfrac{4\pi\xi}{1-4\pi^2\xi^2}\sin(2\pi^2\xi)$ (dove $\mathcal{F}[u(x)](\xi)$ indica la trasformata di Fourier $\mathcal{F}[u(x)](\xi)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}u(x)e^{-2\pi i\xi x}\,dx$ della funzione $u(x)$, $x \in \mathbf{R}$), calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\sin(\pi t)}{1-t^2}\,dt$.

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\pi/2$ $\boxed{\text{B}}$: π^2 $\boxed{\text{C}}$: $\pi/4$ $\boxed{\text{D}}$: 2π $\boxed{\text{E}}$: π $\boxed{\text{F}}$: $2\pi^2$

. . . .

Cognome e nome Firma

ANALISI MATEMATICA C 20 settembre 2004 Compito 1

Istruzioni. 1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, riportare cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande riportate nel foglio allegato; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE solo questo foglio.
6. TEMPO a disposizione: 90 min.

Risposte relative al foglio allegato.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F