1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(e^{x^2y^4}-1)}{(x^2+y^2)^{\alpha-3}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq 6$ (b) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 6$ (c) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (d) $\nabla f(0,0)$ esiste se e solo se $\alpha \leq 7$ (e) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq \frac{11}{2}$ (f) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{11}{2}$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c) $\boxed{\text{C}}$: (a), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c) $\boxed{\text{E}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c), (f)

---

2. Siano T il dominio

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y| - 2 \leq x \leq 4 - y^2\}$$

e $g(x,y) = 4\left(\frac{x}{2} + y\right)$. Detti $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = -4$ e $M = 8$ $\boxed{\text{B}}$: $m = -10$ e $M = 10$ $\boxed{\text{C}}$: $m = -8$ e $M = 10$ $\boxed{\text{D}}$: $m = -4$ e $M = 4$ $\boxed{\text{E}}$: $m = -8$ e $M = 8$ $\boxed{\text{F}}$: $m = -10$ e $M = 4$

---

3. L'integrale

$$\int_\Gamma \sqrt{4+3x^2}\,\mathrm{d}s,$$

ove Γ è l'ellisse di equazione $4x^2 + y^2 = 16$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 0 $\boxed{\text{B}}$: 10π $\boxed{\text{C}}$: 16π $\boxed{\text{D}}$: 20π $\boxed{\text{E}}$: 4π $\boxed{\text{F}}$: 6π

---

4. Il volume della regione $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq z \leq -2y\}$ è

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{3}{2}\pi$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: π $\boxed{\text{D}}$: 2π $\boxed{\text{E}}$: $\frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{5}{2}\pi$

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\log n + 2}{1 + \log(n^4) + nx^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) f_n converge uniformemente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (c) la funzione limite puntuale è continua sul suo dominio (d) f_n converge puntualmente solo in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (e) f_n converge uniformemente in $(-\infty, -A] \cup [A, +\infty)$ per ogni $A > 0$ (f) $\lim_{n\to\infty} \int_{1/2}^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c). (d), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (f) $\boxed{\text{C}}$: (c), (d), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (c), (d) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (b), (e)

---

6. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin^k(x)}{k} [(2k+1)!]^{\alpha-1}, \qquad x \in [0, \pi], \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) La serie converge puntualmente in $[0, \pi]$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (b) La serie converge puntualmente in $[0, \pi]$ se e solo se $\alpha \leq 1$ (c) La serie converge puntualmente in $[0, \pi]$ se e solo se $\alpha < 1$ (d) La serie converge uniformemente in $[0, \pi]$ se e solo se $\alpha < 1$ (e) La serie converge uniformemente in $[0, \pi]$ se e solo se $\alpha \leq 1$ (f) Se $\alpha \leq 1$ la serie converge totalmente in $[0, \pi]$,

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e), $\boxed{\text{F}}$: (b), (d)
