1. Sia T l'insieme definito da $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, -1 \le x \le 1 \, ; 0 \le y \le 1 - x^2\}$ e sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $g(x, y) = x^2(y + \frac{1}{3})$. Detti $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$ si ha

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = 0$ e $M = \frac{1}{3}$ $\boxed{\text{B}}$: $m = \frac{1}{3}$ e $M = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ $\boxed{\text{C}}$: $m = -\frac{1}{3}$ e $M = 0$ $\boxed{\text{D}}$: $m = -\left(\frac{2}{3}\right)^2$ e $M = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ $\boxed{\text{E}}$: $m = 0$ e $M = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

---

2. Determinare per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x, y) = (\alpha x(e^x + e^y) + \beta(x^2 + y^2)e^x)\,\overrightarrow{i} + (2y(e^x - e^y) + \beta(x^2 - y^2)e^y)\,\overrightarrow{j}$$

   è conservativo. Per tali valori di α e β determinare il potenziale φ che vale 0 in $(0, 0)$ e calcolarlo in $(2, 0)$. Si ha

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha = 2; \beta = 1; \varphi(2, 0) = 4$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha = 2; \beta = 1; \varphi(2, 0) = 4(1 + e^2)$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha = 1; \beta = 2; \varphi(2, 0) = 4$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha = 1; \beta = 1; \varphi(2, 0) = 4e^2$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha = 1; \beta = 2; \varphi(2, 0) = 2(1 + e^4)$

---

3. Sia

$$\iint_{T_\varepsilon} \frac{2ye^x}{x} \, dxdy,$$

   dove T_ε è la regione finita del primo quadrante delimitata dalle curve di equazione $y = x$ e $y = \sqrt{x}$ con $0 < \varepsilon \le x \le 1$. Allora

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{T_\varepsilon} \frac{2ye^x}{x} \, dxdy$$

   vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $2(e + 1)$ $\boxed{\text{B}}$: $(e^2 - 1)$ $\boxed{\text{C}}$: $(e + 2)$ $\boxed{\text{D}}$: $2(e - 2)$ $\boxed{\text{E}}$: $(e - 2)$

---

4. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$f_n(x) = \frac{1 - e^{-n(x-1)}}{n + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Delle seguenti affermazioni

   (a) f_n converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) f_n converge puntualmente in $[1, +\infty[$ (c) f_n converge uniformemente in $[1, +\infty[$ (d) f_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ (e) f_n converge uniformemente su intervalli del tipo $[a, +\infty[$, per ogni $a > 1$,

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{B}}$: (e) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{D}}$: (b) $\boxed{\text{E}}$: (a), (b), (c)

---

5. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2(y - 3) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a sinistra, (b) per $0 < y_0 < 3$ l'intervallo massimale di esistenza è tutto $\mathbb{R}$, (c) le soluzioni stazionarie sono $y = -3$ e $y = 3$, (d) per $0 < y_0 < 3$ si ha $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 3$, (e) per ogni $y_0 < 0$ la derivata y' della soluzione è una funzione crescente,

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (b), (d), (e)

SECONDA PARTE:

6. Dare la definizione di serie di funzioni uniformemente convergente.
7. Enunciare il teorema di Abel per le serie di potenze.