1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(2xy^2) - x\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{se}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f è continua in $(0,0)$ (b) f non è continua in $(0,0)$ (c) $\nabla f\,(0,0) = (0,0)$ (d) $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = v_1 v_2(2v_2 - v_1)$ per ogni direzione $v = (v_1, v_2)$ (e) f è differenziabile in $(0,0)$ (f) $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot v$ per ogni direzione v.

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (d), $\boxed{\text{C}}$: (b), (c), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (f)

---

2. Si consideri la funzione $f(x,y) = y + \dfrac{x}{3}$ e sia $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x - \frac{1}{2})^2 \leq y \leq \frac{1}{4} - \frac{x}{3}\}$. Allora detto $m = \min_{(x,y)\in T} f(x,y)$ e $M = \max_{(x,y)\in T} f(x,y)$ si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = \frac{5}{72}$, $M = \frac{1}{4}$ $\boxed{\text{B}}$: $m = \frac{5}{36}$, $M = \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: $m = \frac{5}{36}$, $M = \frac{1}{4}$ $\boxed{\text{D}}$: $m = 0$, $M = \frac{1}{4}$ $\boxed{\text{E}}$: $m = \frac{1}{9}$, $M = 1$ $\boxed{\text{F}}$: $m = \frac{1}{3}$, $M = 2$

---

3. Sia Γ la curva di rappresentazione parametrica

$$\vec{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\,\vec{i} + (\sin t - t\cos t)\,\vec{j} \quad t \in [0, 2\pi].$$

L'integrale curvilineo $\int_\Gamma (x^2 + y^2)\, ds$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $2\pi^2 + 4\pi^4$ $\boxed{\text{B}}$: $3(2\pi^2 + 4\pi^4)$ $\boxed{\text{C}}$: $\pi^2 + 2\pi^4$ $\boxed{\text{D}}$: 1 $\boxed{\text{E}}$: $\pi + 1$ $\boxed{\text{F}}$: $1 + 2\pi^2$

---

4. Sia T il trapezio di vertici $A = (1,0)$, $B = (1,1)$, $C = (3,3)$, $D = (3,0)$. L'integrale

$$\iint_T \frac{1}{x^2+y^2}\, dxdy$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{B}}$: $\log 3$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{\pi}{2}\log 3$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{1}{\pi}\log 2$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{\pi}{3}\log 4$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{\pi}{4}\log 3$

---

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(e^{3x} - 1\right)^n}{n(n!)^{\alpha - 2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) La serie converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ se e solo se $\alpha > 2$ (b) La serie converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ se e solo se $\alpha \geq 2$ (c) Per $\alpha = 2$ la serie converge puntualmente solo in $\left(-\infty, \frac{\log 2}{3}\right]$ (d) Per $\alpha < 2$ la serie converge puntualmente solo in $\left(-\infty, \frac{\log 2}{3}\right)$ (e) Per $\alpha < 2$ la serie converge puntualmente solo per $x = 0$ (f) Per $\alpha = 2$ la serie converge puntualmente solo in $\left(-\infty, \frac{\log 2}{3}\right)$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (c), (e)

---

6. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^t\left(1 - e^{49-y^2}\right) \\ y(0) = y_0, \end{cases}$ al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$. Delle seguenti affermazioni

(a) Per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione globale definita su tutto $\mathbb{R}$ (b) Esiste un'unica soluzione globale definita su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $0 < y_0 < 7$ (c) Le soluzioni stazionarie sono $y = -7$, $y = 0$, $y = 7$ (d) Per ogni $|y_0| > 7$ la soluzione è crescente (e) La soluzione è decrescente se e solo se $0 < y_0 < 7$ (f) Per ogni $y_0 > -7$ si ha $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 7$,

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (d), (e)
