Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. Sia $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ la successione di funzioni $f_n(x) = \arctan\left(\frac{nx^3}{3}\right)$ con $x \in \mathbb{R}$, e siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n\}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n'\}$. Delle seguenti affermazioni:
   (a) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge solo puntualmente a f su $\mathbb{R}$ (c) $\{f_n'(x)\}$ converge uniformemente a g su $\mathbb{R}$ (d) g è una funzione continua su $\mathbb{R}$ (e) $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (f) $\{f_n'(x)\}$ converge solo puntualmente a g su $\mathbb{R}$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (d), (e)

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$: allora la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^e+1}{(\arctan n)^{7\alpha}(e^n+\ln n)}$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: converge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{\text{C}}$: diverge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{\text{D}}$: converge per ogni $\alpha > e$ $\boxed{\text{E}}$: diverge per ogni $\alpha > e$ $\boxed{\text{F}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

3. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n^\beta x)}{\alpha^n + n^\alpha}$ converge totalmente su $\mathbb{R}$ insieme alla serie delle derivate se e solo se

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: per nessun α, β $\boxed{\text{B}}$: $\alpha > 1$ e per ogni β $\boxed{\text{C}}$: $\alpha < 1$ e per ogni β $\boxed{\text{D}}$: per ogni α, β $\boxed{\text{E}}$: $\alpha, \beta > 1$ $\boxed{\text{F}}$: $\beta > 1$

4. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^2+1}{|x|^\alpha} & \text{se } |x| \le 1, x \neq 0 \\ e^{1-x^2} & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

e sia $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la sua trasformata di Fourier. Allora $\mathcal{F}(f)$ è continua e a quadrato sommabile se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha < 1/2$ e $\beta = 1$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha \le 1/2$ e $\beta = 1$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha \le 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha < 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: per nessun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

---

5. Sia $a_n = \left(\sqrt{n^4+2n} - \sqrt{n^4+\arctan(n^2)}\right)^n \frac{n^n}{2^n}$. Allora la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: ha raggio di convergenza ∞ $\boxed{\text{B}}$: ha raggio di convergenza $1/2$ $\boxed{\text{C}}$: converge assolutamente in $[-1,1]$ $\boxed{\text{D}}$: non converge uniformemente in $[-1,1]$ $\boxed{\text{E}}$: converge puntualmente in $[0,3]$ $\boxed{\text{F}}$: ha raggio di convergenza e

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e 2π-periodica e siano a_n, b_n i suoi coefficienti di Fourier. Posto $g(x) = f(-x)$, e detti $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ i coefficienti di Fourier di g, si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\tilde{a}_n = a_n$, $\tilde{b}_n = b_n$ $\boxed{\text{B}}$: $\tilde{a}_n = -a_n$, $\tilde{b}_n = b_n$ $\boxed{\text{C}}$: $\tilde{a}_n = -a_n$, $\tilde{b}_n = -b_n$ $\boxed{\text{D}}$: $\tilde{a}_n = -b_n$, $\tilde{b}_n = -a_n$ $\boxed{\text{E}}$: $\tilde{a}_n = a_n$, $\tilde{b}_n = -b_n$ $\boxed{\text{F}}$: $\tilde{a}_n = b_n$, $\tilde{b}_n = a_n$

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 - x^2)^{\frac{1}{3}} \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale (b) esiste almeno un $\alpha \ge 0$ tale che le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale non sono verificate (c) per $|\alpha| < 1$ $y(x)$ è decrescente in un intorno di $x = 1$ (d) per $\alpha > 1$ $y(x)$ ha un punto di minimo in $x = 1$ (e) per ogni $\alpha \neq \pm 1$ $y(x)$ è strettamente monotona in un intorno di $x = 1$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{E}}$: (b), (c) $\boxed{\text{F}}$: (b), (e)

---

8. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. L'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{2+\sin(e^{\alpha x})}{\sqrt[5]{x^6 \cosh(e^{-x})+1}}\, dx$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: diverge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{B}}$: converge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{C}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: diverge per ogni $\alpha > -1$ $\boxed{\text{F}}$: converge per ogni $\alpha < -1$

---

1. Sia $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ la successione di funzioni $f_n(x) = \arctan\left(\frac{nx^3}{3}\right)$ con $x \in \mathbb{R}$, e siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n\}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n'\}$. Delle seguenti affermazioni:
   (a) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge solo puntualmente a f su $\mathbb{R}$ (c) $\{f_n'(x)\}$ converge uniformemente a g su $\mathbb{R}$ (d) g è una funzione continua su $\mathbb{R}$ (e) $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (f) $\{f_n'(x)\}$ converge solo puntualmente a g su $\mathbb{R}$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (d), (e)

---

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$: allora la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^e+1}{(\arctan n)^{7\alpha}(e^n+\ln n)}$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: converge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{\text{C}}$: diverge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{\text{D}}$: converge per ogni $\alpha > e$ $\boxed{\text{E}}$: diverge per ogni $\alpha > e$ $\boxed{\text{F}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

---

3. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n^\beta x)}{\alpha^n+n^\alpha}$ converge totalmente su $\mathbb{R}$ insieme alla serie delle derivate se e solo se

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: per nessun α, β $\boxed{\text{B}}$: $\alpha > 1$ e per ogni β $\boxed{\text{C}}$: $\alpha < 1$ e per ogni β $\boxed{\text{D}}$: per ogni α, β $\boxed{\text{E}}$: $\alpha, \beta > 1$ $\boxed{\text{F}}$: $\beta > 1$

---

4. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^2+1}{|x|^\alpha} & \text{se } |x| \leq 1, x \neq 0 \\ e^{1-x^2} & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$
   e sia $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la sua trasformata di Fourier. Allora $\mathcal{F}(f)$ è continua e a quadrato sommabile se e solo se

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha < 1/2$ e $\beta = 1$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha \leq 1/2$ e $\beta = 1$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha \leq 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha < 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: per nessun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

---

5. Sia $a_n = \left(\sqrt{n^4+2n} - \sqrt{n^4+\arctan(n^2)}\right)^n \frac{n^n}{2^n}$. Allora la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: ha raggio di convergenza ∞ $\boxed{\text{B}}$: ha raggio di convergenza $1/2$ $\boxed{\text{C}}$: converge assolutamente in $[-1,1]$ $\boxed{\text{D}}$: non converge uniformemente in $[-1,1]$ $\boxed{\text{E}}$: converge puntualmente in $[0,3]$ $\boxed{\text{F}}$: ha raggio di convergenza e

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e 2π-periodica e siano a_n, b_n i suoi coefficienti di Fourier. Posto $g(x) = f(-x)$, e detti $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ i coefficienti di Fourier di g, si ha

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\tilde{a}_n = a_n$, $\tilde{b}_n = b_n$ $\boxed{\text{B}}$: $\tilde{a}_n = -a_n$, $\tilde{b}_n = b_n$ $\boxed{\text{C}}$: $\tilde{a}_n = -a_n$, $\tilde{b}_n = -b_n$ $\boxed{\text{D}}$: $\tilde{a}_n = -b_n$, $\tilde{b}_n = -a_n$ $\boxed{\text{E}}$: $\tilde{a}_n = a_n$, $\tilde{b}_n = -b_n$ $\boxed{\text{F}}$: $\tilde{a}_n = b_n$, $\tilde{b}_n = a_n$

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 - x^2)^{\frac{1}{3}} \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale (b) esiste almeno un $\alpha \geq 0$ tale che le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale non sono verificate (c) per $|\alpha| < 1$ $y(x)$ è decrescente in un intorno di $x = 1$ (d) per $\alpha > 1$ $y(x)$ ha un punto di minimo in $x = 1$ (e) per ogni $\alpha \neq \pm 1$ $y(x)$ è strettamente monotona in un intorno di $x = 1$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{E}}$: (b), (c) $\boxed{\text{F}}$: (b), (e)

---

8. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. L'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{2+\sin(e^{\alpha x})}{\sqrt[5]{x^6 \cosh(e^{-x})+1}}\, dx$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: diverge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{B}}$: converge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{C}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: diverge per ogni $\alpha > -1$ $\boxed{\text{F}}$: converge per ogni $\alpha < -1$

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$: allora la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^e+1}{(\arctan n)^{6\alpha}(e^n+\ln n)}$

   Risp.: $\boxed{A}$: converge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{B}$: diverge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{C}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{D}$: diverge per ogni $\alpha > e$ $\boxed{E}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{F}$: converge per ogni $\alpha > e$

2. Sia $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ la successione di funzioni $f_n(x) = \arctan\left(\frac{nx^5}{5}\right)$ con $x \in \mathbb{R}$, e siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n\}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n'\}$. Delle seguenti affermazioni:
   (a) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge solo puntualmente a f su $\mathbb{R}$ (c) $\{f_n'(x)\}$ converge uniformemente a g su $\mathbb{R}$ (d) g è una funzione continua su $\mathbb{R}$ (e) $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (f) $\{f_n'(x)\}$ converge solo puntualmente a g su $\mathbb{R}$
   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{A}$: (b), (f) $\boxed{B}$: (a), (d), (f) $\boxed{C}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{D}$: (b), (d), (f) $\boxed{E}$: (a), (c), (d) $\boxed{F}$: (a), (c), (d), (e)

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e 2π-periodica e siano a_n, b_n i suoi coefficienti di Fourier. Posto $g(x) = f(-x)$, e detti $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ i coefficienti di Fourier di g, si ha

   Risp.: $\boxed{A}$: $\tilde{a}_n = a_n$, $\tilde{b}_n = b_n$ $\boxed{B}$: $\tilde{a}_n = a_n$, $\tilde{b}_n = -b_n$ $\boxed{C}$: $\tilde{a}_n = -a_n$, $\tilde{b}_n = b_n$ $\boxed{D}$: $\tilde{a}_n = b_n$,

$\tilde b_n = a_n$ $\boxed{\text{E}}$: $\tilde a_n = -a_n$, $\tilde b_n = -b_n$ $\boxed{\text{F}}$: $\tilde a_n = -b_n$, $\tilde b_n = -a_n$

---

4. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^2+1}{|x|^\alpha} & \text{se } |x| \le 1, x \neq 0 \\ e^{1-x^2} & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

e sia $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la sua trasformata di Fourier. Allora $\mathcal{F}(f)$ è continua e a quadrato sommabile se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha \le 1/2$ e $\beta = 1$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha \le 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha < 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha < 1/2$ e $\beta = 1$ $\boxed{\text{E}}$: per nessun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

---

5. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(3n^\beta x)}{\alpha^n + n^\alpha}$ converge totalmente su $\mathbb{R}$ insieme alla serie delle derivate se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha > 1$ e per ogni β $\boxed{\text{B}}$: $\alpha, \beta > 1$ $\boxed{\text{C}}$: $\beta > 1$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha < 1$ e per ogni β $\boxed{\text{E}}$: per ogni α, β $\boxed{\text{F}}$: per nessun α, β

---

6. Sia $a_n = \left(\sqrt{n^6 + 3n} - \sqrt{n^6 + \arctan(n^3)}\right)^n \frac{n^{2n}}{3^n}$. Allora la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: ha raggio di convergenza ∞ $\boxed{\text{B}}$: converge assolutamente in $[-1, 1]$ $\boxed{\text{C}}$: non converge uniformemente in $[-1, 1]$ $\boxed{\text{D}}$: ha raggio di convergenza $1/2$ $\boxed{\text{E}}$: ha raggio di convergenza e $\boxed{\text{F}}$: converge puntualmente in $[0, 3]$

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. L'integrale improprio $\int_3^{+\infty} \frac{2+\sin(e^{\alpha x})}{\sqrt[5]{x^6 \cosh(e^{-x})+1}}\, dx$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{B}}$: diverge per ogni $\alpha > -1$ $\boxed{\text{C}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: diverge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{E}}$: converge per ogni $\alpha < -1$ $\boxed{\text{F}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

---

8. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 - x^2)^{\frac{3}{5}} \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale (b) esiste almeno un $\alpha \ge 0$ tale che le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale non sono verificate (c) per $|\alpha| < 1$ $y(x)$ è decrescente in un intorno di $x = 1$ (d) per $\alpha > 1$ $y(x)$ ha un punto di minimo in $x = 1$ (e) per ogni $\alpha \neq \pm 1$ $y(x)$ è strettamente monotona in un intorno di $x = 1$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b), (e) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c)

---

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$: allora la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^e+1}{(\arctan n)^{6\alpha}(e^n+\ln n)}$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{\text{B}}$: diverge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{\text{C}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: diverge per ogni $\alpha > e$ $\boxed{\text{E}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: converge per ogni $\alpha > e$

---

2. Sia $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ la successione di funzioni $f_n(x) = \arctan\left(\frac{nx^5}{5}\right)$ con $x \in \mathbb{R}$, e siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n\}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n'\}$. Delle seguenti affermazioni:
   (a) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge solo puntualmente a f su $\mathbb{R}$ (c) $\{f_n'(x)\}$ converge uniformemente a g su $\mathbb{R}$ (d) g è una funzione continua su $\mathbb{R}$ (e) $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (f) $\{f_n'(x)\}$ converge solo puntualmente a g su $\mathbb{R}$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (d), (e)

---

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e 2π-periodica e siano a_n, b_n i suoi coefficienti di Fourier. Posto $g(x) = f(-x)$, e detti $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ i coefficienti di Fourier di g, si ha

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\tilde{a}_n = a_n$, $\tilde{b}_n = b_n$ $\boxed{\text{B}}$: $\tilde{a}_n = a_n$, $\tilde{b}_n = -b_n$ $\boxed{\text{C}}$: $\tilde{a}_n = -a_n$, $\tilde{b}_n = b_n$ $\boxed{\text{D}}$: $\tilde{a}_n = b_n$, $\tilde{b}_n = a_n$ $\boxed{\text{E}}$: $\tilde{a}_n = -a_n$, $\tilde{b}_n = -b_n$ $\boxed{\text{F}}$: $\tilde{a}_n = -b_n$, $\tilde{b}_n = -a_n$

---

4. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^2+1}{|x|^\alpha} & \text{se } |x| \leq 1, x \neq 0 \\ e^{1-x^2} & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$
   e sia $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la sua trasformata di Fourier. Allora $\mathcal{F}(f)$ è continua e a quadrato sommabile se e solo se

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha \leq 1/2$ e $\beta = 1$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha \leq 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha < 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha < 1/2$ e $\beta = 1$ $\boxed{\text{E}}$: per nessun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

---

5. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(3n^\beta x)}{\alpha^n + n^\alpha}$ converge totalmente su $\mathbb{R}$ insieme alla serie delle derivate se e solo se

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha > 1$ e per ogni β $\boxed{\text{B}}$: $\alpha, \beta > 1$ $\boxed{\text{C}}$: $\beta > 1$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha < 1$ e per ogni β $\boxed{\text{E}}$: per ogni α, β $\boxed{\text{F}}$: per nessun α, β

---

6. Sia $a_n = \left(\sqrt{n^6 + 3n} - \sqrt{n^6 + \arctan(n^3)}\right)^n \frac{n^{2n}}{3^n}$. Allora la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: ha raggio di convergenza ∞ $\boxed{\text{B}}$: converge assolutamente in $[-1, 1]$ $\boxed{\text{C}}$: non converge uniformemente in $[-1, 1]$ $\boxed{\text{D}}$: ha raggio di convergenza $1/2$ $\boxed{\text{E}}$: ha raggio di convergenza e $\boxed{\text{F}}$: converge puntualmente in $[0, 3]$

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. L'integrale improprio $\int_3^{+\infty} \frac{2+\sin(e^{\alpha x})}{\sqrt[5]{x^6 \cosh(e^{-x})+1}}\, dx$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{B}}$: diverge per ogni $\alpha > -1$ $\boxed{\text{C}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: diverge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{E}}$: converge per ogni $\alpha < -1$ $\boxed{\text{F}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

---

8. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 - x^2)^{\frac{3}{5}} \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale (b) esiste almeno un $\alpha \geq 0$ tale che le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale non sono verificate (c) per $|\alpha| < 1$ $y(x)$ è decrescente in un intorno di $x = 1$ (d) per $\alpha > 1$ $y(x)$ ha un punto di minimo in $x = 1$ (e) per ogni $\alpha \neq \pm 1$ $y(x)$ è strettamente monotona in un intorno di $x = 1$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b), (e) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c)

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(4n^\beta x)}{\alpha^n + n^\alpha}$ converge totalmente su $\mathbb{R}$ insieme alla serie delle derivate se e solo se

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha < 1$ e per ogni β $\boxed{\text{B}}$: $\alpha > 1$ e per ogni β $\boxed{\text{C}}$: per ogni α, β $\boxed{\text{D}}$: $\beta > 1$ $\boxed{\text{E}}$: per nessun α, β $\boxed{\text{F}}$: $\alpha, \beta > 1$

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$: allora la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^e + 1}{(\arctan n)^{5\alpha}(e^n + \ln n)}$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: diverge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{\text{B}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: converge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{\text{D}}$: converge per ogni $\alpha > e$ $\boxed{\text{E}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: diverge per ogni $\alpha > e$

3. Sia $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ la successione di funzioni $f_n(x) = \arctan\left(\frac{nx^7}{7}\right)$ con $x \in \mathbb{R}$, e siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n\}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f'_n\}$. Delle seguenti affermazioni: (a) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge solo puntualmente a f su $\mathbb{R}$ (c) $\{f'_n(x)\}$ converge uniformemente a g su $\mathbb{R}$ (d) g è una funzione continua su $\mathbb{R}$ (e) $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (f) $\{f'_n(x)\}$ converge solo puntualmente a g su $\mathbb{R}$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (d), (e)

4. Sia $a_n = \left(\sqrt{n^8+4n} - \sqrt{n^8+\arctan(n^4)}\right)^n \frac{n^{3n}}{4^n}$. Allora la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

Risp.: $\boxed{A}$: converge puntualmente in $[0,3]$ $\boxed{B}$: ha raggio di convergenza ∞ $\boxed{C}$: ha raggio di convergenza $1/2$ $\boxed{D}$: converge assolutamente in $[-1,1]$ $\boxed{E}$: non converge uniformemente in $[-1,1]$ $\boxed{F}$: ha raggio di convergenza e

---

5. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^2+1}{|x|^\alpha} & \text{se } |x| \leq 1, x \neq 0 \\ e^{1-x^2} & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

e sia $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la sua trasformata di Fourier. Allora $\mathcal{F}(f)$ è continua e a quadrato sommabile se e solo se

Risp.: $\boxed{A}$: $\alpha < 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{B}$: $\alpha < 1/2$ e $\beta = 1$ $\boxed{C}$: $\alpha \leq 1/2$ e $\beta = 1$ $\boxed{D}$: per nessun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{E}$: $\alpha \leq 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{F}$: per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

---

6. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 - x^2)^{\frac{5}{7}} \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale (b) esiste almeno un $\alpha \geq 0$ tale che le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale non sono verificate (c) per $|\alpha| < 1$ $y(x)$ è decrescente in un intorno di $x = 1$ (d) per $\alpha > 1$ $y(x)$ ha un punto di minimo in $x = 1$ (e) per ogni $\alpha \neq \pm 1$ $y(x)$ è strettamente monotona in un intorno di $x = 1$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{A}$: (a), (c), (e) $\boxed{B}$: (b), (c), (d) $\boxed{C}$: (a), (c) $\boxed{D}$: (b), (c) $\boxed{E}$: (b), (e) $\boxed{F}$: (b), (c), (e)

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. L'integrale improprio $\int_4^{+\infty} \frac{2+\sin(e^{\alpha x})}{\sqrt[5]{x^6 \cosh(e^{-x})+1}}\, dx$

Risp.: $\boxed{A}$: converge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{B}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{C}$: diverge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{D}$: diverge per ogni $\alpha > -1$ $\boxed{E}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{F}$: converge per ogni $\alpha < -1$

---

8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e 2π-periodica e siano a_n, b_n i suoi coefficienti di Fourier. Posto $g(x) = f(-x)$, e detti $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ i coefficienti di Fourier di g, si ha

Risp.: $\boxed{A}$: $\tilde{a}_n = -a_n$, $\tilde{b}_n = b_n$ $\boxed{B}$: $\tilde{a}_n = -a_n$, $\tilde{b}_n = -b_n$ $\boxed{C}$: $\tilde{a}_n = a_n$, $\tilde{b}_n = b_n$ $\boxed{D}$: $\tilde{a}_n = -b_n$, $\tilde{b}_n = -a_n$ $\boxed{E}$: $\tilde{a}_n = b_n$, $\tilde{b}_n = a_n$ $\boxed{F}$: $\tilde{a}_n = a_n$, $\tilde{b}_n = -b_n$

---

1. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(4n^\beta x)}{\alpha^n + n^\alpha}$ converge totalmente su $\mathbb{R}$ insieme alla serie delle derivate se e solo se

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha < 1$ e per ogni β $\boxed{\text{B}}$: $\alpha > 1$ e per ogni β $\boxed{\text{C}}$: per ogni α, β $\boxed{\text{D}}$: $\beta > 1$ $\boxed{\text{E}}$: per nessun α, β $\boxed{\text{F}}$: $\alpha, \beta > 1$

---

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$: allora la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^e + 1}{(\arctan n)^{5\alpha}(e^n + \ln n)}$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: diverge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{\text{B}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: converge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{\text{D}}$: converge per ogni $\alpha > e$ $\boxed{\text{E}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: diverge per ogni $\alpha > e$

---

3. Sia $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ la successione di funzioni $f_n(x) = \arctan\left(\frac{nx^7}{7}\right)$ con $x \in \mathbb{R}$, e siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n\}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n'\}$. Delle seguenti affermazioni:

   (a) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge solo puntualmente a f su $\mathbb{R}$ (c) $\{f_n'(x)\}$ converge uniformemente a g su $\mathbb{R}$ (d) g è una funzione continua su $\mathbb{R}$ (e) $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (f) $\{f_n'(x)\}$ converge solo puntualmente a g su $\mathbb{R}$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (d), (e)

---

4. Sia $a_n = \left(\sqrt{n^8 + 4n} - \sqrt{n^8 + \arctan(n^4)}\right)^n \frac{n^{3n}}{4^n}$. Allora la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge puntualmente in $[0, 3]$ $\boxed{\text{B}}$: ha raggio di convergenza ∞ $\boxed{\text{C}}$: ha raggio di convergenza $1/2$ $\boxed{\text{D}}$: converge assolutamente in $[-1, 1]$ $\boxed{\text{E}}$: non converge uniformemente in $[-1, 1]$ $\boxed{\text{F}}$: ha raggio di convergenza e

---

5. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^2+1}{|x|^\alpha} & \text{se } |x| \leq 1, x \neq 0 \\ e^{1-x^2} & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

   e sia $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la sua trasformata di Fourier. Allora $\mathcal{F}(f)$ è continua e a quadrato sommabile se e solo se

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha < 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha < 1/2$ e $\beta = 1$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha \leq 1/2$ e $\beta = 1$ $\boxed{\text{D}}$: per nessun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha \leq 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

---

6. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione locale del problema di Cauchy

   $$\begin{cases} y' = (y^2 - x^2)^{\frac{5}{7}} \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

   Delle seguenti affermazioni

(a) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale (b) esiste almeno un $\alpha \geq 0$ tale che le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale non sono verificate (c) per $|\alpha| < 1$ $y(x)$ è decrescente in un intorno di $x = 1$ (d) per $\alpha > 1$ $y(x)$ ha un punto di minimo in $x = 1$ (e) per ogni $\alpha \neq \pm 1$ $y(x)$ è strettamente monotona in un intorno di $x = 1$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c) $\boxed{\text{E}}$: (b), (e) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c), (e)

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. L'integrale improprio $\int_4^{+\infty} \frac{2+\sin(e^{\alpha x})}{\sqrt[5]{x^6 \cosh(e^{-x})+1}}\, dx$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{B}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: diverge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{D}}$: diverge per ogni $\alpha > -1$ $\boxed{\text{E}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: converge per ogni $\alpha < -1$

---

8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e 2π-periodica e siano a_n, b_n i suoi coefficienti di Fourier. Posto $g(x) = f(-x)$, e detti $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ i coefficienti di Fourier di g, si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\tilde{a}_n = -a_n$, $\tilde{b}_n = b_n$ $\boxed{\text{B}}$: $\tilde{a}_n = -a_n$, $\tilde{b}_n = -b_n$ $\boxed{\text{C}}$: $\tilde{a}_n = a_n$, $\tilde{b}_n = b_n$ $\boxed{\text{D}}$: $\tilde{a}_n = -b_n$, $\tilde{b}_n = -a_n$ $\boxed{\text{E}}$: $\tilde{a}_n = b_n$, $\tilde{b}_n = a_n$ $\boxed{\text{F}}$: $\tilde{a}_n = a_n$, $\tilde{b}_n = -b_n$

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 - x^2)^{\frac{7}{9}} \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale (b) esiste almeno un $\alpha \geq 0$ tale che le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale non sono verificate (c) per $|\alpha| < 1$ $y(x)$ è decrescente in un intorno di $x = 1$ (d) per $\alpha > 1$ $y(x)$ ha un punto di minimo in $x = 1$ (e) per ogni $\alpha \neq \pm 1$ $y(x)$ è strettamente monotona in un intorno di $x = 1$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{E}}$: (b), (c) $\boxed{\text{F}}$: (b), (e)

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. L'integrale improprio $\int_5^{+\infty} \frac{2+\sin(e^{\alpha x})}{\sqrt[5]{x^6 \cosh(e^{-x})+1}}\, dx$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: diverge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{C}}$: converge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{D}}$: diverge per ogni $\alpha > -1$ $\boxed{\text{E}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: converge per ogni $\alpha < -1$

3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$: allora la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^e+1}{(\arctan n)^{4\alpha}(e^n+\ln n)}$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: converge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{\text{C}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: diverge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{\text{E}}$: diverge per ogni $\alpha > e$ $\boxed{\text{F}}$: converge per ogni $\alpha > e$

---

4. Sia $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ la successione di funzioni $f_n(x) = \arctan\left(\frac{nx^9}{9}\right)$ con $x \in \mathbb{R}$, e siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n\}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n'\}$. Delle seguenti affermazioni:

(a) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge solo puntualmente a f su $\mathbb{R}$ (c) $\{f_n'(x)\}$ converge uniformemente a g su $\mathbb{R}$ (d) g è una funzione continua su $\mathbb{R}$ (e) $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (f) $\{f_n'(x)\}$ converge solo puntualmente a g su $\mathbb{R}$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (d), (e)

---

5. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(5n^\beta x)}{\alpha^n + n^\alpha}$ converge totalmente su $\mathbb{R}$ insieme alla serie delle derivate se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha < 1$ e per ogni β $\boxed{\text{B}}$: $\alpha > 1$ e per ogni β $\boxed{\text{C}}$: per ogni α, β $\boxed{\text{D}}$: $\alpha, \beta > 1$ $\boxed{\text{E}}$: $\beta > 1$ $\boxed{\text{F}}$: per nessun α, β

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e 2π-periodica e siano a_n, b_n i suoi coefficienti di Fourier. Posto $g(x) = f(-x)$, e detti $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ i coefficienti di Fourier di g, si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\tilde{a}_n = -a_n$, $\tilde{b}_n = b_n$ $\boxed{\text{B}}$: $\tilde{a}_n = -a_n$, $\tilde{b}_n = -b_n$ $\boxed{\text{C}}$: $\tilde{a}_n = a_n$, $\tilde{b}_n = -b_n$ $\boxed{\text{D}}$: $\tilde{a}_n = a_n$, $\tilde{b}_n = b_n$ $\boxed{\text{E}}$: $\tilde{a}_n = -b_n$, $\tilde{b}_n = -a_n$ $\boxed{\text{F}}$: $\tilde{a}_n = b_n$, $\tilde{b}_n = a_n$

---

7. Sia $a_n = \left(\sqrt{n^{10}+5n} - \sqrt{n^{10}+\arctan(n^5)}\right)^n \frac{n^{4n}}{5^n}$. Allora la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge assolutamente in $[-1, 1]$ $\boxed{\text{B}}$: non converge uniformemente in $[-1, 1]$ $\boxed{\text{C}}$: ha raggio di convergenza e $\boxed{\text{D}}$: converge puntualmente in $[0, 3]$ $\boxed{\text{E}}$: ha raggio di convergenza ∞ $\boxed{\text{F}}$: ha raggio di convergenza $1/2$

---

8. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^2+1}{|x|^\alpha} & \text{se } |x| \leq 1, x \neq 0 \\ e^{1-x^2} & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

e sia $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la sua trasformata di Fourier. Allora $\mathcal{F}(f)$ è continua e a quadrato sommabile se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: per nessun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha < 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha < 1/2$ e $\beta = 1$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha \leq 1/2$ e $\beta = 1$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha \leq 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

---

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 - x^2)^{\frac{7}{9}} \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale (b) esiste almeno un $\alpha \geq 0$ tale che le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale non sono verificate (c) per $|\alpha| < 1$ $y(x)$ è decrescente in un intorno di $x = 1$ (d) per $\alpha > 1$ $y(x)$ ha un punto di minimo in $x = 1$ (e) per ogni $\alpha \neq \pm 1$ $y(x)$ è strettamente monotona in un intorno di $x = 1$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{E}}$: (b), (c) $\boxed{\text{F}}$: (b), (e)

---

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. L'integrale improprio $\int_5^{+\infty} \frac{2+\sin(e^{\alpha x})}{\sqrt[5]{x^6 \cosh(e^{-x})+1}}\, dx$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: diverge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{C}}$: converge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{D}}$: diverge per ogni $\alpha > -1$ $\boxed{\text{E}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: converge per ogni $\alpha < -1$

---

3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$: allora la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^e+1}{(\arctan n)^{4\alpha}(e^n+\ln n)}$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: converge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{\text{C}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: diverge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{\text{E}}$: diverge per ogni $\alpha > e$ $\boxed{\text{F}}$: converge per ogni $\alpha > e$

---

4. Sia $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ la successione di funzioni $f_n(x) = \arctan\left(\frac{nx^9}{9}\right)$ con $x \in \mathbb{R}$, e siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n\}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n'\}$. Delle seguenti affermazioni:

(a) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge solo puntualmente a f su $\mathbb{R}$ (c) $\{f_n'(x)\}$ converge uniformemente a g su $\mathbb{R}$ (d) g è una funzione continua su $\mathbb{R}$ (e) $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (f) $\{f_n'(x)\}$ converge solo puntualmente a g su $\mathbb{R}$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (d), (e)

---

5. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(5n^\beta x)}{\alpha^n+n^\alpha}$ converge totalmente su $\mathbb{R}$ insieme alla serie delle derivate se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha < 1$ e per ogni β $\boxed{\text{B}}$: $\alpha > 1$ e per ogni β $\boxed{\text{C}}$: per ogni α, β $\boxed{\text{D}}$: $\alpha, \beta > 1$ $\boxed{\text{E}}$: $\beta > 1$ $\boxed{\text{F}}$: per nessun α, β

---

6. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione integrabile e 2π-periodica e siano a_n, b_n i suoi coefficienti di Fourier. Posto $g(x)=f(-x)$, e detti $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ i coefficienti di Fourier di g, si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\tilde{a}_n = -a_n,\ \tilde{b}_n = b_n$ $\boxed{\text{B}}$: $\tilde{a}_n = -a_n,\ \tilde{b}_n = -b_n$ $\boxed{\text{C}}$: $\tilde{a}_n = a_n,\ \tilde{b}_n = -b_n$ $\boxed{\text{D}}$: $\tilde{a}_n = a_n,\ \tilde{b}_n = b_n$ $\boxed{\text{E}}$: $\tilde{a}_n = -b_n,\ \tilde{b}_n = -a_n$ $\boxed{\text{F}}$: $\tilde{a}_n = b_n,\ \tilde{b}_n = a_n$

---

7. Sia $a_n = \left(\sqrt{n^{10}+5n} - \sqrt{n^{10}+\arctan(n^5)}\right)^n \frac{n^{4n}}{5^n}$. Allora la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge assolutamente in $[-1,1]$ $\boxed{\text{B}}$: non converge uniformemente in $[-1,1]$ $\boxed{\text{C}}$: ha raggio di convergenza e $\boxed{\text{D}}$: converge puntualmente in $[0,3]$ $\boxed{\text{E}}$: ha raggio di convergenza ∞ $\boxed{\text{F}}$: ha raggio di convergenza $1/2$

---

8. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^2+1}{|x|^\alpha} & \text{se } |x| \le 1, x \neq 0 \\ e^{1-x^2} & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

e sia $\mathcal{F}(f):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la sua trasformata di Fourier. Allora $\mathcal{F}(f)$ è continua e a quadrato sommabile se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: per nessun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha < 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha < 1/2$ e $\beta = 1$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha \le 1/2$ e $\beta = 1$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha \le 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

---

1. Sia $a_n = \left(\sqrt{n^{12}+6n} - \sqrt{n^{12}+\arctan(n^6)}\right)^n \frac{n^{5n}}{6^n}$. Allora la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: non converge uniformemente in $[-1,1]$ $\boxed{\text{B}}$: converge puntualmente in $[0,3]$ $\boxed{\text{C}}$: converge assolutamente in $[-1,1]$ $\boxed{\text{D}}$: ha raggio di convergenza ∞ $\boxed{\text{E}}$: ha raggio di convergenza $1/2$ $\boxed{\text{F}}$: ha raggio di convergenza e

---

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$: allora la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^e+1}{(\arctan n)^{3\alpha}(e^n+\ln n)}$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge per ogni $\alpha > e$ $\boxed{\text{B}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: converge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{\text{D}}$: diverge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{\text{E}}$: diverge per ogni $\alpha > e$ $\boxed{\text{F}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

---

3. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(6n^\beta x)}{\alpha^n + n^\alpha}$ converge totalmente su $\mathbb{R}$ insieme alla serie delle derivate se e solo se

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha < 1$ e per ogni β $\boxed{\text{B}}$: per ogni α, β $\boxed{\text{C}}$: per nessun α, β $\boxed{\text{D}}$: $\alpha > 1$ e per ogni β $\boxed{\text{E}}$: $\alpha, \beta > 1$ $\boxed{\text{F}}$: $\beta > 1$

---

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e 2π-periodica e siano a_n, b_n i suoi coefficienti di Fourier. Posto $g(x) = f(-x)$, e detti $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ i coefficienti di Fourier di g, si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\tilde{a}_n = -a_n$, $\tilde{b}_n = b_n$ $\boxed{\text{B}}$: $\tilde{a}_n = -a_n$, $\tilde{b}_n = -b_n$ $\boxed{\text{C}}$: $\tilde{a}_n = -b_n$, $\tilde{b}_n = -a_n$ $\boxed{\text{D}}$: $\tilde{a}_n = b_n$, $\tilde{b}_n = a_n$ $\boxed{\text{E}}$: $\tilde{a}_n = a_n$, $\tilde{b}_n = -b_n$ $\boxed{\text{F}}$: $\tilde{a}_n = a_n$, $\tilde{b}_n = b_n$

---

5. Sia $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ la successione di funzioni $f_n(x) = \arctan\left(\frac{nx^{11}}{11}\right)$ con $x \in \mathbb{R}$, e siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n\}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n'\}$. Delle seguenti affermazioni:

(a) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge solo puntualmente a f su $\mathbb{R}$ (c) $\{f_n'(x)\}$ converge uniformemente a g su $\mathbb{R}$ (d) g è una funzione continua su $\mathbb{R}$ (e) $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (f) $\{f_n'(x)\}$ converge solo puntualmente a g su $\mathbb{R}$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (d), (e)

---

6. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^2+1}{|x|^\alpha} & \text{se } |x| \leq 1, x \neq 0 \\ e^{1-x^2} & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

e sia $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la sua trasformata di Fourier. Allora $\mathcal{F}(f)$ è continua e a quadrato sommabile se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha < 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha < 1/2$ e $\beta = 1$ $\boxed{\text{C}}$: per nessun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha \leq 1/2$ e $\beta = 1$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha \leq 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 - x^2)^{\frac{9}{11}} \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale (b) esiste almeno un $\alpha \geq 0$ tale che le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale non sono verificate (c) per $|\alpha| < 1$ $y(x)$ è decrescente in un intorno di $x = 1$ (d) per $\alpha > 1$ $y(x)$ ha un punto di minimo in $x = 1$ (e) per ogni $\alpha \neq \pm 1$ $y(x)$ è strettamente monotona in un intorno di $x = 1$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c) $\boxed{\text{C}}$: (b), (e) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c), (e)

---

8. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. L'integrale improprio $\int_6^{+\infty} \frac{2+\sin(e^{\alpha x})}{\sqrt[5]{x^6 \cosh(e^{-x})+1}}\, dx$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: converge per ogni $\alpha < -1$ $\boxed{\text{D}}$: diverge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{E}}$: converge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{F}}$: diverge per ogni $\alpha > -1$

---

1. Sia $a_n = \left(\sqrt{n^{12}+6n} - \sqrt{n^{12}+\arctan(n^6)}\right)^n \frac{n^{5n}}{6^n}$. Allora la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

   Risp.: [A] : non converge uniformemente in $[-1,1]$ [B] : converge puntualmente in $[0,3]$ [C] : converge assolutamente in $[-1,1]$ [D] : ha raggio di convergenza ∞ [E] : ha raggio di convergenza $1/2$ [F] : ha raggio di convergenza e

---

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$: allora la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^e+1}{(\arctan n)^{3\alpha}(e^n+\ln n)}$

   Risp.: [A] : converge per ogni $\alpha > e$ [B] : diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ [C] : converge per ogni $\alpha \neq 0$ [D] : diverge per ogni $\alpha \neq 0$ [E] : diverge per ogni $\alpha > e$ [F] : converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

---

3. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(6n^\beta x)}{\alpha^n + n^\alpha}$ converge totalmente su $\mathbb{R}$ insieme alla serie delle derivate se e solo se

   Risp.: [A] : $\alpha < 1$ e per ogni β [B] : per ogni α, β [C] : per nessun α, β [D] : $\alpha > 1$ e per ogni β [E] : $\alpha, \beta > 1$ [F] : $\beta > 1$

---

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e 2π-periodica e siano a_n, b_n i suoi coefficienti di Fourier. Posto $g(x) = f(-x)$, e detti $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ i coefficienti di Fourier di g, si ha

   Risp.: [A] : $\tilde{a}_n = -a_n$, $\tilde{b}_n = b_n$ [B] : $\tilde{a}_n = -a_n$, $\tilde{b}_n = -b_n$ [C] : $\tilde{a}_n = -b_n$, $\tilde{b}_n = -a_n$ [D] : $\tilde{a}_n = b_n$, $\tilde{b}_n = a_n$ [E] : $\tilde{a}_n = a_n$, $\tilde{b}_n = -b_n$ [F] : $\tilde{a}_n = a_n$, $\tilde{b}_n = b_n$

---

5. Sia $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ la successione di funzioni $f_n(x) = \arctan\left(\frac{nx^{11}}{11}\right)$ con $x \in \mathbb{R}$, e siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n\}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n'\}$. Delle seguenti affermazioni:
   (a) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge solo puntualmente a f su $\mathbb{R}$ (c) $\{f_n'(x)\}$ converge uniformemente a g su $\mathbb{R}$ (d) g è una funzione continua su $\mathbb{R}$ (e) $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (f) $\{f_n'(x)\}$ converge solo puntualmente a g su $\mathbb{R}$

   le uniche corrette sono

   Risp.: [A] : (b), (f) [B] : (b), (d), (f) [C] : (a), (d), (f) [D] : (b), (d), (e), (f) [E] : (a), (c), (d) [F] : (a), (c), (d), (e)

---

6. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^2+1}{|x|^\alpha} & \text{se } |x| \leq 1, x \neq 0 \\ e^{1-x^2} & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$
   e sia $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la sua trasformata di Fourier. Allora $\mathcal{F}(f)$ è continua e a quadrato sommabile se e solo se

   Risp.: [A] : $\alpha < 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ [B] : $\alpha < 1/2$ e $\beta = 1$ [C] : per nessun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ [D] : $\alpha \leq 1/2$ e $\beta = 1$ [E] : $\alpha \leq 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ [F] : per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 - x^2)^{\frac{9}{11}} \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale (b) esiste almeno un $\alpha \geq 0$ tale che le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale non sono verificate (c) per $|\alpha| < 1$ $y(x)$ è decrescente in un intorno di $x = 1$ (d) per $\alpha > 1$ $y(x)$ ha un punto di minimo in $x = 1$ (e) per ogni $\alpha \neq \pm 1$ $y(x)$ è strettamente monotona in un intorno di $x = 1$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c) $\boxed{\text{C}}$: (b), (e) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c), (e)

---

8. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. L'integrale improprio $\int_6^{+\infty} \frac{2+\sin(e^{\alpha x})}{\sqrt[5]{x^6 \cosh(e^{-x})+1}}\, dx$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: converge per ogni $\alpha < -1$ $\boxed{\text{D}}$: diverge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{E}}$: converge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{F}}$: diverge per ogni $\alpha > -1$

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. Sia $a_n = \left(\sqrt{n^{14}+7n} - \sqrt{n^{14}+\arctan(n^7)}\right)^n \frac{n^{6n}}{7^n}$. Allora la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge puntualmente in $[0,3]$ $\boxed{\text{B}}$: ha raggio di convergenza ∞ $\boxed{\text{C}}$: non converge uniformemente in $[-1,1]$ $\boxed{\text{D}}$: ha raggio di convergenza $1/2$ $\boxed{\text{E}}$: converge assolutamente in $[-1,1]$ $\boxed{\text{F}}$: ha raggio di convergenza e

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. L'integrale improprio $\int_7^{+\infty} \frac{2+\sin(e^{\alpha x})}{\sqrt[5]{x^6\cosh(e^{-x})+1}}\,dx$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: diverge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{C}}$: converge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{D}}$: diverge per ogni $\alpha > -1$ $\boxed{\text{E}}$: converge per ogni $\alpha < -1$ $\boxed{\text{F}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e 2π-periodica e siano a_n, b_n i suoi coefficienti di Fourier. Posto $g(x) = f(-x)$, e detti $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ i coefficienti di Fourier di g, si ha

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\tilde{a}_n = -a_n$, $\tilde{b}_n = -b_n$ $\boxed{\text{B}}$: $\tilde{a}_n = -b_n$, $\tilde{b}_n = -a_n$ $\boxed{\text{C}}$: $\tilde{a}_n = b_n$, $\tilde{b}_n = a_n$ $\boxed{\text{D}}$: $\tilde{a}_n = a_n$, $\tilde{b}_n = -b_n$ $\boxed{\text{E}}$: $\tilde{a}_n = a_n$, $\tilde{b}_n = b_n$ $\boxed{\text{F}}$: $\tilde{a}_n = -a_n$, $\tilde{b}_n = b_n$

4. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^2+1}{|x|^\alpha} & \text{se } |x| \leq 1, x \neq 0 \\ e^{1-x^2} & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

e sia $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la sua trasformata di Fourier. Allora $\mathcal{F}(f)$ è continua e a quadrato sommabile se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha \leq 1/2$ e $\beta = 1$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha \leq 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: per nessun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha < 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: $\alpha < 1/2$ e $\beta = 1$

---

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 - x^2)^{\frac{11}{13}} \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale (b) esiste almeno un $\alpha \geq 0$ tale che le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale non sono verificate (c) per $|\alpha| < 1$ $y(x)$ è decrescente in un intorno di $x = 1$ (d) per $\alpha > 1$ $y(x)$ ha un punto di minimo in $x = 1$ (e) per ogni $\alpha \neq \pm 1$ $y(x)$ è strettamente monotona in un intorno di $x = 1$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{E}}$: (b), (c) $\boxed{\text{F}}$: (b), (e)

---

6. Sia $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ la successione di funzioni $f_n(x) = \arctan\left(\frac{nx^{13}}{13}\right)$ con $x \in \mathbb{R}$, e siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n\}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n'\}$. Delle seguenti affermazioni:

(a) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge solo puntualmente a f su $\mathbb{R}$ (c) $\{f_n'(x)\}$ converge uniformemente a g su $\mathbb{R}$ (d) g è una funzione continua su $\mathbb{R}$ (e) $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (f) $\{f_n'(x)\}$ converge solo puntualmente a g su $\mathbb{R}$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (d), (e)

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$: allora la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^e+1}{(\arctan n)^{2\alpha}(e^n+\ln n)}$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{\text{B}}$: diverge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{\text{C}}$: converge per ogni $\alpha > e$ $\boxed{\text{D}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: diverge per ogni $\alpha > e$

---

8. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(7n^\beta x)}{\alpha^n+n^\alpha}$ converge totalmente su $\mathbb{R}$ insieme alla serie delle derivate se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: per ogni α, β $\boxed{\text{B}}$: per nessun α, β $\boxed{\text{C}}$: $\alpha > 1$ e per ogni β $\boxed{\text{D}}$: $\alpha < 1$ e per ogni β $\boxed{\text{E}}$: $\alpha, \beta > 1$ $\boxed{\text{F}}$: $\beta > 1$

---

1. Sia $a_n = \left(\sqrt{n^{14}+7n} - \sqrt{n^{14}+\arctan(n^7)}\right)^n \frac{n^{6n}}{7^n}$. Allora la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge puntualmente in $[0,3]$ $\boxed{\text{B}}$: ha raggio di convergenza ∞ $\boxed{\text{C}}$: non converge uniformemente in $[-1,1]$ $\boxed{\text{D}}$: ha raggio di convergenza $1/2$ $\boxed{\text{E}}$: converge assolutamente in $[-1,1]$ $\boxed{\text{F}}$: ha raggio di convergenza e

---

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. L'integrale improprio $\int_7^{+\infty} \frac{2+\sin(e^{\alpha x})}{\sqrt[5]{x^6\cosh(e^{-x})+1}}\,dx$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: diverge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{C}}$: converge per ogni $\alpha \neq -1$ $\boxed{\text{D}}$: diverge per ogni $\alpha > -1$ $\boxed{\text{E}}$: converge per ogni $\alpha < -1$ $\boxed{\text{F}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

---

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e 2π-periodica e siano a_n, b_n i suoi coefficienti di Fourier. Posto $g(x) = f(-x)$, e detti $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ i coefficienti di Fourier di g, si ha

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\tilde{a}_n = -a_n,\ \tilde{b}_n = -b_n$ $\boxed{\text{B}}$: $\tilde{a}_n = -b_n,\ \tilde{b}_n = -a_n$ $\boxed{\text{C}}$: $\tilde{a}_n = b_n,\ \tilde{b}_n = a_n$ $\boxed{\text{D}}$: $\tilde{a}_n = a_n,\ \tilde{b}_n = -b_n$ $\boxed{\text{E}}$: $\tilde{a}_n = a_n,\ \tilde{b}_n = b_n$ $\boxed{\text{F}}$: $\tilde{a}_n = -a_n,\ \tilde{b}_n = b_n$

---

4. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^2+1}{|x|^\alpha} & \text{se } |x| \leq 1, x \neq 0 \\ e^{1-x^2} & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

   e sia $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la sua trasformata di Fourier. Allora $\mathcal{F}(f)$ è continua e a quadrato sommabile se e solo se

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha \leq 1/2$ e $\beta = 1$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha \leq 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: per nessun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha < 1/2$ e per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: $\alpha < 1/2$ e $\beta = 1$

---

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 - x^2)^{\frac{11}{13}} \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

   Delle seguenti affermazioni

   (a) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale (b) esiste almeno un $\alpha \geq 0$ tale che le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione locale non sono verificate (c) per $|\alpha| < 1$ $y(x)$ è decrescente in un intorno di $x = 1$ (d) per $\alpha > 1$ $y(x)$ ha un punto di minimo in $x = 1$ (e) per ogni $\alpha \neq \pm 1$ $y(x)$ è strettamente monotona in un intorno di $x = 1$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{E}}$: (b), (c) $\boxed{\text{F}}$: (b), (e)

---

6. Sia $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ la successione di funzioni $f_n(x) = \arctan\left(\frac{nx^{13}}{13}\right)$ con $x \in \mathbb{R}$, e siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f_n\}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il limite puntuale di $\{f'_n\}$. Delle seguenti affermazioni:

   (a) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge solo puntualmente a f su $\mathbb{R}$ (c) $\{f'_n(x)\}$ converge uniformemente a g su $\mathbb{R}$ (d) g è una funzione continua su $\mathbb{R}$ (e) $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (f) $\{f'_n(x)\}$ converge solo puntualmente a g su $\mathbb{R}$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (d), (e)

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$: allora la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^e+1}{(\arctan n)^{2\alpha}(e^n+\ln n)}$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{\text{B}}$: diverge per ogni $\alpha \neq 0$ $\boxed{\text{C}}$: converge per ogni $\alpha > e$ $\boxed{\text{D}}$: converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: diverge per ogni $\alpha > e$

---

8. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(7n^\beta x)}{\alpha^n+n^\alpha}$ converge totalmente su $\mathbb{R}$ insieme alla serie delle derivate se e solo se

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: per ogni α, β $\boxed{\text{B}}$: per nessun α, β $\boxed{\text{C}}$: $\alpha > 1$ e per ogni β $\boxed{\text{D}}$: $\alpha < 1$ e per ogni β $\boxed{\text{E}}$: $\alpha, \beta > 1$ $\boxed{\text{F}}$: $\beta > 1$
