Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(1-\cos\left(\frac{1}{7n^3}\right)\right)^{\alpha}$. Allora

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: la serie converge semplicemente se e solo se $0 \le \alpha \le \frac{1}{6}$, converge assolutamente se e solo se $\alpha > \frac{1}{6}$, non converge se e solo se $\alpha < 0$ $\boxed{\text{B}}$: la serie converge semplicemente se e solo se $\alpha < \frac{1}{6}$, converge assolutamente se e solo se $\alpha \ge \frac{1}{6}$ $\boxed{\text{C}}$: la serie converge assolutamente se e solo se $\alpha > 0$, non converge se e solo se $\alpha < 0$ $\boxed{\text{D}}$: la serie converge semplicemente se e solo se $0 < \alpha \le \frac{1}{6}$, converge assolutamente se e solo se $\alpha > \frac{1}{6}$, non converge se e solo se $\alpha \le 0$ $\boxed{\text{E}}$: la serie converge semplicemente se e solo se $\alpha > 0$, converge assolutamente se e solo se $\alpha < 0$ $\boxed{\text{F}}$: la serie converge semplicemente se e solo se $0 < \alpha < \frac{1}{6}$, converge assolutamente se e solo se $\alpha \ge \frac{1}{6}$, non converge se e solo se $\alpha \le 0$

2. La somma della serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{(2n+2)}}{2(2n+1)(n+1)}$ con $x \in [0,1[$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $x\arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} - \frac{x^2}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $x\arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{1}{1+x^2}$ $\boxed{\text{D}}$: $x\arctan x + \frac{\ln(1+x^2)}{2} + \frac{x^2}{2}$ $\boxed{\text{E}}$: $\arctan x$ $\boxed{\text{F}}$: $x\arctan x + \ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2}$

3. Per ogni $k \ge 1$ sia $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica definita da

$$f_k(x) = \begin{cases} k^2 e^{2x} & \text{se } -\pi \le x < 0 \\ (-1)^k \left[k^2 + k^2\left(\frac{e^{-2\pi}-1}{\pi}\right)x\right] & \text{se } 0 \le x < \pi \end{cases}$$

e sia $\mathcal{F}_k$ la relativa serie di Fourier. Allora

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\mathcal{F}_k(\pi) \to +\infty$ $\boxed{\text{B}}$: $\mathcal{F}_k(\pi) = 0$ per k dispari $\boxed{\text{C}}$: $\mathcal{F}_k(\pi) = 0$ per k pari $\boxed{\text{D}}$: $\mathcal{F}_k(0) \to +\infty$ $\boxed{\text{E}}$: la successione $\{\mathcal{F}_k(0)\}$ è limitata $\boxed{\text{F}}$: $\mathcal{F}_k(\pi) \to 0$

---

4. Calcolare la trasformata di Fourier di $u(x) = (\cos^2 x)\chi_{[-2,2]}(x)$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{\cos(2\xi)}{\xi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(2(\xi+2))}{2+\xi} + \frac{\cos(2(2-\xi))}{2-\xi}\right]$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{\cos(2\xi)}{\xi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2(\xi+2))}{2+\xi} + \frac{\sin(2(2-\xi))}{2-\xi}\right]$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{\sin(2\xi)}{\xi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2(\xi+2))}{2+\xi} + \frac{\sin(2(2-\xi))}{2-\xi}\right]$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{\sin(2\xi)}{\xi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2(\xi+2))}{2+\xi} - \frac{\sin(2(2-\xi))}{2-\xi}\right]$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{\sin(2\xi)}{\xi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2(\xi+2))}{2+\xi} + \frac{\sin(2(2-\xi))}{2-\xi}\right]$ $\boxed{\text{F}}$: $-\frac{\sin(2\xi)}{\xi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2(\xi+2))}{2+\xi} + \frac{\sin(2(2-\xi))}{2-\xi}\right]$

---

5. L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos x)^\alpha}{\cosh x - 1}\, dx$ converge se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha < \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha \le \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha > \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha \ge \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{E}}$: per ogni α $\boxed{\text{F}}$: per nessun α

---

6. Sia dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{y}{y+t} + t \\ y(0) = 1 \end{cases}$ e sia $y : I \to \mathbb{R}$ la sua soluzione massimale. Delle seguenti affermazioni

(a) esiste $\varepsilon > 0$ tale che $]-\varepsilon, +\infty[\subseteq I$ (b) y è crescente per $t > 0$ (c) y è decrescente per $t > 0$ (d) I è limitato (e) y è limitata (f) $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b), (e) $\boxed{\text{D}}$: (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c)

---

7. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f_n(x) = \alpha^n (x-n) e^{-(x-n)^2}$ con $n \ge 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora la successione di funzioni $\{f_n\}$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge puntualmente su $\mathbb{R}$ se e solo se $|\alpha| < 1$ $\boxed{\text{B}}$: converge uniformemente su $\mathbb{R}$ se e solo se $|\alpha| \le 1$ $\boxed{\text{C}}$: converge puntualmente su $\mathbb{R}$ se e solo se $|\alpha| \le 1$ $\boxed{\text{D}}$: non converge uniformemente per nessun α $\boxed{\text{E}}$: non converge puntualmente per nessun α $\boxed{\text{F}}$: converge uniformemente su $\mathbb{R}$ se e solo se $|\alpha| < 1$

---

8. Per ogni $n \ge 1$ sia $f_n(x) = \sqrt[3]{nx}\,\chi_{[n,n+1[}(x)$, e si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Allora delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge totalmente in $\mathbb{R}$ (b) la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (c) la somma della serie non è integrabile in $[0,2]$ (d) la somma della serie è derivabile in $]-\infty, 1[$ (e) la somma della serie è una funzione discontinua in $\mathbb{R}$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (d), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d) $\boxed{\text{C}}$: (b), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e) $\boxed{\text{F}}$: (b), (d), (e)

---

1. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(1-\cos\left(\frac{1}{7n^3}\right)\right)^{\alpha}$. Allora

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: la serie converge semplicemente se e solo se $0 \le \alpha \le \frac{1}{6}$, converge assolutamente se e solo se $\alpha > \frac{1}{6}$, non converge se e solo se $\alpha < 0$ $\boxed{\text{B}}$: la serie converge semplicemente se e solo se $\alpha < \frac{1}{6}$, converge assolutamente se e solo se $\alpha \ge \frac{1}{6}$ $\boxed{\text{C}}$: la serie converge assolutamente se e solo se $\alpha > 0$, non converge se e solo se $\alpha < 0$ $\boxed{\text{D}}$: la serie converge semplicemente se e solo se $0 < \alpha \le \frac{1}{6}$, converge assolutamente se e solo se $\alpha > \frac{1}{6}$, non converge se e solo se $\alpha \le 0$ $\boxed{\text{E}}$: la serie converge semplicemente se e solo se $\alpha > 0$, converge assolutamente se e solo se $\alpha < 0$ $\boxed{\text{F}}$: la serie converge semplicemente se e solo se $0 < \alpha < \frac{1}{6}$, converge assolutamente se e solo se $\alpha \ge \frac{1}{6}$, non converge se e solo se $\alpha \le 0$

---

2. La somma della serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{(2n+2)}}{2(2n+1)(n+1)}$ con $x \in [0,1[$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $x\arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} - \frac{x^2}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $x\arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{1}{1+x^2}$ $\boxed{\text{D}}$: $x\arctan x + \frac{\ln(1+x^2)}{2} + \frac{x^2}{2}$ $\boxed{\text{E}}$: $\arctan x$ $\boxed{\text{F}}$: $x\arctan x + \ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2}$

---

3. Per ogni $k \ge 1$ sia $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica definita da

$$f_k(x) = \begin{cases} k^2 e^{2x} & \text{se } -\pi \le x < 0 \\ (-1)^k \left[k^2 + k^2\left(\frac{e^{-2\pi}-1}{\pi}\right)x\right] & \text{se } 0 \le x < \pi \end{cases}$$

   e sia $\mathcal{F}_k$ la relativa serie di Fourier. Allora

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\mathcal{F}_k(\pi) \to +\infty$ $\boxed{\text{B}}$: $\mathcal{F}_k(\pi) = 0$ per k dispari $\boxed{\text{C}}$: $\mathcal{F}_k(\pi) = 0$ per k pari $\boxed{\text{D}}$: $\mathcal{F}_k(0) \to +\infty$ $\boxed{\text{E}}$: la successione $\{\mathcal{F}_k(0)\}$ è limitata $\boxed{\text{F}}$: $\mathcal{F}_k(\pi) \to 0$

---

4. Calcolare la trasformata di Fourier di $u(x) = (\cos^2 x)\chi_{[-2,2]}(x)$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{\cos(2\xi)}{\xi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(2(\xi+2))}{2+\xi} + \frac{\cos(2(2-\xi))}{2-\xi}\right]$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{\cos(2\xi)}{\xi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2(\xi+2))}{2+\xi} + \frac{\sin(2(2-\xi))}{2-\xi}\right]$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{\sin(2\xi)}{\xi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2(\xi+2))}{2+\xi} + \frac{\sin(2(2-\xi))}{2-\xi}\right]$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{\sin(2\xi)}{\xi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2(\xi+2))}{2+\xi} - \frac{\sin(2(2-\xi))}{2-\xi}\right]$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{\sin(2\xi)}{\xi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2(\xi+2))}{2+\xi} + \frac{\sin(2(2-\xi))}{2-\xi}\right]$ $\boxed{\text{F}}$: $-\frac{\sin(2\xi)}{\xi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2(\xi+2))}{2+\xi} + \frac{\sin(2(2-\xi))}{2-\xi}\right]$

---

5. L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos x)^{\alpha}}{\cosh x - 1}\,dx$ converge se e solo se

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha < \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha \le \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha > \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha \ge \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{E}}$: per ogni α $\boxed{\text{F}}$: per nessun α

---

6. Sia dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{y}{y+t} + t \\ y(0) = 1 \end{cases}$ e sia $y : I \to \mathbb{R}$ la sua soluzione massimale. Delle seguenti affermazioni

   (a) esiste $\varepsilon > 0$ tale che $]-\varepsilon, +\infty[\subseteq I$ (b) y è crescente per $t > 0$ (c) y è decrescente per $t > 0$ (d) I è limitato (e) y è limitata (f) $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b), (e) $\boxed{\text{D}}$: (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c)

---

7. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f_n(x) = \alpha^n (x-n) e^{-(x-n)^2}$ con $n \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora la successione di funzioni $\{f_n\}$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge puntualmente su $\mathbb{R}$ se e solo se $|\alpha| < 1$ $\boxed{\text{B}}$: converge uniformemente su $\mathbb{R}$ se e solo se $|\alpha| \leq 1$ $\boxed{\text{C}}$: converge puntualmente su $\mathbb{R}$ se e solo se $|\alpha| \leq 1$ $\boxed{\text{D}}$: non converge uniformemente per nessun α $\boxed{\text{E}}$: non converge puntualmente per nessun α $\boxed{\text{F}}$: converge uniformemente su $\mathbb{R}$ se e solo se $|\alpha| < 1$

---

8. Per ogni $n \geq 1$ sia $f_n(x) = \sqrt[3]{nx}\,\chi_{[n,n+1[}(x)$, e si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Allora delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge totalmente in $\mathbb{R}$ (b) la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (c) la somma della serie non è integrabile in $[0,2]$ (d) la somma della serie è derivabile in $]-\infty,1[$ (e) la somma della serie è una funzione discontinua in $\mathbb{R}$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (d), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d) $\boxed{\text{C}}$: (b), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e) $\boxed{\text{F}}$: (b), (d), (e)
