1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} - \cos(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua su $\mathbb{R}^2$ (b) f non è continua in $(0,0)$ (c) $\nexists\, \nabla f(0,0)$ (d) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ (e) esistono solo le derivate parziali in $(0,0)$, mentre tutte le altre derivate direzionali non esistono (f) f è differenziabile

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c) $\boxed{\text{D}}$: (a), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (d), (e)

---

2. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 3 \leq x+y \leq 6\,,\, \frac{1}{2}x \leq y \leq 2x\}$. Sia $g(x,y) = xy + 1$, e siano $M = \max_D g$ e $m = \min_D g$. Allora

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $M = 3$ e $m = 1$ $\boxed{\text{B}}$: $M = 10$ e $m = 1$ $\boxed{\text{C}}$: $M = 10$ e $m = 3$ $\boxed{\text{D}}$: $M = 4$ e $m = -2$ $\boxed{\text{E}}$: $M = 18$ e $m = 3$ $\boxed{\text{F}}$: $M = 3$ e $m = 2$

---

3. L'integrale curvilineo di prima specie $\displaystyle\int_\Gamma 21y\, ds$, dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + 2t\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$ con $t \in [0,1]$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $28(2^{3/2}-1)$ $\boxed{\text{B}}$: $2^{3/2}-1$ $\boxed{\text{C}}$: $7(2^{3/2}-1)$ $\boxed{\text{D}}$: $7\cdot 2^{3/2}$ $\boxed{\text{E}}$: $2^{3/2}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{4}{3}(2^{3/2}-1)$

---

4. L'integrale di superficie

$$2\iint_S \frac{x^2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\, dS$$

dove S è la superficie data in forma parametrica $\vec{r}(u,v) = u\,\vec{i} + v\vec{j} + (u^2+v^2)\vec{k}$ con $(u,v) \in D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 :\; u^2+v^2 \leq 4\}$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 2π $\boxed{\text{B}}$: π $\boxed{\text{C}}$: 8 $\boxed{\text{D}}$: 0 $\boxed{\text{E}}$: $-\pi$ $\boxed{\text{F}}$: 8π

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{e^{nx}}{2n + e^{nx}}\,, \quad x \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) f_n non converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (c) f_n non converge uniformemente in $\mathbb{R}$ (d) f_n converge uniformemente in $(-\infty, 0]$ (e) f_n converge uniformemente in $(0,+\infty)$ (f) f_n converge uniformemente in $[a,+\infty)$ per ogni $a > 0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (f)

---

6. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^2 \arctan(y^2 - 49) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Delle seguenti informazioni

(a) per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione globale definita su tutto $\mathbb{R}$, (b) le soluzioni stazionarie sono $y = 7$ e $y = 0$, (c) per $y_0 < 7$ la soluzione è decrescente, (d) per $y_0 > 0$ si ha $\lim_{x \to -\infty} y(x) = 7$, (e) per $y_0 < 7$, si ha $\lim_{x \to +\infty} y(x) = -7$, (f) per $y_0 > 7$ la soluzione è limitata per $t \leq 0$,

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (b), (c), (f)
