1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x^2} - \cos(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua in $(0,0)$ (b) f non è continua in $(0,0)$ (c) f è differenziabile in $(0,0)$ (d) f non è differenziabile in $(0,0)$ (e) tutte le derivate direzionali di f in $(0,0)$ esistono e sono nulle (f) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (d), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (d), (f)

---

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \alpha x^2 + 4xy + y^2$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Delle seguenti affermazioni

(a) per $\alpha \neq 4$, $(0,0)$ è l'unico punto stazionario (b) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, f ha infiniti punti stazionari (c) per $\alpha = 4$, tutti i punti della retta $y = -2x$ sono di minimo assoluto (d) per $\alpha < 4$, $(0,0)$ è punto di massimo relativo (e) per $\alpha > 4$, $(0,0)$ è punto di minimo assoluto (f) per $\alpha > 4$, $(0,0)$ è punto di sella

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c) $\boxed{\text{C}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c), (e)

---

3. L'integrale

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma,$$

ove $\overrightarrow{F}(x,y) = (y, -x)$ e Γ è parametrizzata da

$$\overrightarrow{r}(t) := (\cos^3(t), \sin^3(t)), \quad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right],$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $-\frac{3}{16}\pi$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{3}{16}\pi$ $\boxed{\text{D}}$: 0 $\boxed{\text{E}}$: π $\boxed{\text{F}}$: $-\frac{3}{4}\pi$

---

4. L'integrale

$$\iint_T \left(2\sin(x)e^y + \frac{9}{13}x^2\right) dxdy$$

con $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - |x|, \ -1 \leq x \leq 1\}$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 0 $\boxed{\text{B}}$: $\frac{3}{20}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{3}{5}$ $\boxed{\text{D}}$: $-\frac{3}{10}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{3}{10}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{1}{2}$

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan\left(\left(\frac{3}{x}\right)^n\right), \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente in $(0, +\infty)$ (b) la funzione limite puntuale è continua sul suo dominio (c) f_n converge uniformemente in $(0, +\infty)$ (d) f_n non converge uniformemente in $(0, +\infty) \setminus \{3\}$ (e) f_n converge uniformemente in $(0, a] \cup [b, +\infty)$ per ogni $0 < a < 3$ e ogni $b > 3$ (f) $\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 f_n(x)dx = 0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (e), (f)

---

6. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{x}{\sqrt{\log(n^2+3)}}\right) \frac{n^{1-\alpha}}{\exp\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) La serie converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (b) La serie converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ se e solo se $\alpha > 4$ (c) La serie converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ se e solo se $\alpha > 5$ (d) La serie converge totalmente in $\mathbb{R}$ se e solo se $\alpha > 4$ (e) La serie converge totalmente in $\mathbb{R}$ se e solo se $\alpha > 5$ (f) La serie converge totalmente in $[-A, A]$ per ogni $A > 0$ se e solo se $\alpha > 6$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (c), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d) $\boxed{\text{C}}$: (c), (e) $\boxed{\text{D}}$: (b), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e), $\boxed{\text{F}}$: (b), (d)
