Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. La trasformata di Fourier di $u(x) = \sin^2 x \chi_{[-2\pi,2\pi]}(x)$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\hat{u}(\xi) = 4i\frac{\sin(2\pi\xi)}{\xi(\xi^2-4)}$ $\boxed{\text{B}}$: $\hat{u}(\xi) = 2\frac{\sin(2\pi\xi)}{\xi(\xi^2-4)}$ $\boxed{\text{C}}$: $\hat{u}(\xi) = 4\frac{\sin(2\pi\xi)}{\xi(\xi^2-4)}$ $\boxed{\text{D}}$: $\hat{u}(\xi) = -4i\frac{\sin(2\pi\xi)}{\xi(\xi^2-4)}$ $\boxed{\text{E}}$: $\hat{u}(\xi) = 2i\frac{\sin(2\pi\xi)}{\xi(\xi^2-4)}$ $\boxed{\text{F}}$: $\hat{u}(\xi) = -4\frac{\sin(2\pi\xi)}{\xi(\xi^2-4)}$

2. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' - y'' - 2y' = 10\cos t \quad t > 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -4 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

   è data da

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $e^{-t} + \cos t - 3\sin t$ $\boxed{\text{B}}$: $e^{2t} + \cos t - 3\sin t$ $\boxed{\text{C}}$: $e^{-t} + \cos t + \sin t$ $\boxed{\text{D}}$: $e^{-t} + \cos t + 3\sin t$ $\boxed{\text{E}}$: $e^{2t} + \cos t + 3\sin t$ $\boxed{\text{F}}$: $e^{-t} + \cos t - \sin t$

3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$: allora la serie numerica $\sum_{n=2}^{+\infty}(e^{n^\alpha} - 1)\ln(2 + n^{-2})^{n^2}$ converge se e solo se

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha \leq -3$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha > -3$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha \geq -3$ $\boxed{\text{D}}$: per ogni α $\boxed{\text{E}}$: $\alpha < -3$ $\boxed{\text{F}}$: per nessun α

4. Sia data la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+\cos n)\left(\frac{x}{x-1}\right)^{7n}$. Allora delle seguenti affermazioni

   (a) la serie converge puntualmente per $x > 1$ (b) la serie converge puntualmente per $x < 1/2$ (c) la serie converge uniformemente per $x < 0$ (d) la serie converge uniformemente per $x \leq 0$ (e) la serie converge totalmente per $x > 2$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c) $\boxed{\text{D}}$: (a), (e) $\boxed{\text{E}}$: (b) $\boxed{\text{F}}$: (a)

---

5. Per ogni $\alpha > 0$ sia $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica definita in $[-\pi, \pi[$ da

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(x+\pi) & -\pi \leq x < 0 \\ 2(\cos x)^+ & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

   e siano a_n^α e b_n^α i suoi coefficienti di Fourier. Delle seguenti affermazioni

   (a) $\forall \alpha > 0$ la serie di Fourier di f_α converge puntualmente a f_α su $\mathbb{R}$ (b) $\exists \alpha > 0$ tale che la serie di Fourier di f_α converge uniformemente in $\mathbb{R}$ (c) $\forall \alpha > 0$ la serie di Fourier di f_α converge uniformemente a f_α in $[\frac{9}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi]$ (d) $\forall \alpha > 0$ si ha $\frac{a_0^\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^\alpha = \alpha\pi$ (e) $\exists \alpha > 0$ tale che $\frac{(a_0^\alpha)^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[(a_n^\alpha)^2 + (b_n^\alpha)^2] = \frac{\alpha^2\pi^2}{3}$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (c) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c) $\boxed{\text{E}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{F}}$: (b), (e)

---

6. Sia $y_\alpha : I \to \mathbb{R}$ la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1-|y|}{3+y} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

   con $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: y_α è limitata per ogni $\alpha \neq -3$ $\boxed{\text{B}}$: y_α è crescente per ogni $\alpha > 1$ $\boxed{\text{C}}$: y_α è convessa per ogni $\alpha > 1$ $\boxed{\text{D}}$: y_α è strettamente crescente per ogni $-1 \leq \alpha < 1$ $\boxed{\text{E}}$: y_α è concava per ogni $\alpha > 1$ $\boxed{\text{F}}$: $\lim_{t\to+\infty} y_\alpha(t) = +\infty$ per ogni $\alpha > 1$.

---

7. Sia data la successione di funzioni $f_n(x) = \left(1 + \frac{nx}{n+\sin n}\right)^{3n}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ il suo limite puntuale. Delle seguenti affermazioni

   (a) $\{f_n\}$ converge puntualmente ma non uniformemente a f su $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n\}$ converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$ (c) $\{f_n\}$ converge puntualmente ma non uniformemente a f su $]-2, 0]$ (d) $\{f_n\}$ converge uniformemente a f su $]-2, 0]$ (e) $\{f_n\}$ converge puntualmente ma non uniformemente a f su $[0, 1]$ (f) $\{f_n\}$ converge uniformemente a f su $[-1, -1/2]$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{C}}$: (c), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (d), (f)

---

8. Sia data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ dove

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \frac{3}{n} \\ [4(nx-3)+\frac{1}{n}]^{-n} & \text{se } \frac{3}{n} < x \leq \frac{4}{n} \\ 4^{-n} & \text{se } x > \frac{4}{n}. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge puntualmente e totalmente in $]0,+\infty[$ (b) per ogni $a>0$ la serie converge totalmente in $[a,+\infty[$ (c) la somma della serie è una funzione discontinua in $]4,+\infty[$ (d) la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (e) la somma della serie è derivabile in $]4,+\infty[$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (b), (d), (e) $\boxed{\text{F}}$: (b), (e)

1. La trasformata di Fourier di $u(x) = \sin^2 x \chi_{[-2\pi,2\pi]}(x)$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\hat{u}(\xi) = 4i\frac{\sin(2\pi\xi)}{\xi(\xi^2-4)}$ $\boxed{\text{B}}$: $\hat{u}(\xi) = 2\frac{\sin(2\pi\xi)}{\xi(\xi^2-4)}$ $\boxed{\text{C}}$: $\hat{u}(\xi) = 4\frac{\sin(2\pi\xi)}{\xi(\xi^2-4)}$ $\boxed{\text{D}}$: $\hat{u}(\xi) = -4i\frac{\sin(2\pi\xi)}{\xi(\xi^2-4)}$ $\boxed{\text{E}}$: $\hat{u}(\xi) = 2i\frac{\sin(2\pi\xi)}{\xi(\xi^2-4)}$ $\boxed{\text{F}}$: $\hat{u}(\xi) = -4\frac{\sin(2\pi\xi)}{\xi(\xi^2-4)}$

2. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' - y'' - 2y' = 10\cos t \quad t > 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -4 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

   è data da

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $e^{-t} + \cos t - 3\sin t$ $\boxed{\text{B}}$: $e^{2t} + \cos t - 3\sin t$ $\boxed{\text{C}}$: $e^{-t} + \cos t + \sin t$ $\boxed{\text{D}}$: $e^{-t} + \cos t + 3\sin t$ $\boxed{\text{E}}$: $e^{2t} + \cos t + 3\sin t$ $\boxed{\text{F}}$: $e^{-t} + \cos t - \sin t$

3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$: allora la serie numerica $\sum_{n=2}^{+\infty}(e^{n^\alpha} - 1)\ln(2 + n^{-2})^{n^2}$ converge se e solo se

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\alpha \leq -3$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha > -3$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha \geq -3$ $\boxed{\text{D}}$: per ogni α $\boxed{\text{E}}$: $\alpha < -3$ $\boxed{\text{F}}$: per nessun α

4. Sia data la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2 + \cos n)\left(\frac{x}{x-1}\right)^{7n}$. Allora delle seguenti affermazioni

   (a) la serie converge puntualmente per $x > 1$ (b) la serie converge puntualmente per $x < 1/2$ (c) la serie converge uniformemente per $x < 0$ (d) la serie converge uniformemente per $x \leq 0$ (e) la serie converge totalmente per $x > 2$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c) $\boxed{\text{D}}$: (a), (e) $\boxed{\text{E}}$: (b) $\boxed{\text{F}}$: (a)

5. Per ogni $\alpha > 0$ sia $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica definita in $[-\pi, \pi[$ da

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(x + \pi) & -\pi \leq x < 0 \\ 2(\cos x)^+ & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

   e siano a_n^α e b_n^α i suoi coefficienti di Fourier. Delle seguenti affermazioni

   (a) $\forall\alpha > 0$ la serie di Fourier di f_α converge puntualmente a f_α su $\mathbb{R}$ (b) $\exists\alpha > 0$ tale che la serie di Fourier di f_α converge uniformemente in $\mathbb{R}$ (c) $\forall\alpha > 0$ la serie di Fourier di f_α converge uniformemente a f_α in $[\frac{9}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi]$ (d) $\forall\alpha > 0$ si ha $\frac{a_0^\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^\alpha = \alpha\pi$ (e) $\exists\alpha > 0$ tale che $\frac{(a_0^\alpha)^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[(a_n^\alpha)^2 + (b_n^\alpha)^2] = \frac{\alpha^2\pi^2}{3}$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (c) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c) $\boxed{\text{E}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{F}}$: (b), (e)

6. Sia $y_\alpha : I \to \mathbb{R}$ la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1-|y|}{3+y} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: y_α è limitata per ogni $\alpha \neq -3$ $\boxed{\text{B}}$: y_α è crescente per ogni $\alpha > 1$ $\boxed{\text{C}}$: y_α è convessa per ogni $\alpha > 1$ $\boxed{\text{D}}$: y_α è strettamente crescente per ogni $-1 \leq \alpha < 1$ $\boxed{\text{E}}$: y_α è concava per ogni $\alpha > 1$ $\boxed{\text{F}}$: $\lim_{t\to+\infty} y_\alpha(t) = +\infty$ per ogni $\alpha > 1$.

---

7. Sia data la successione di funzioni $f_n(x) = \left(1 + \frac{nx}{n+\sin n}\right)^{3n}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ il suo limite puntuale. Delle seguenti affermazioni

(a) $\{f_n\}$ converge puntualmente ma non uniformemente a f su $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n\}$ converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$ (c) $\{f_n\}$ converge puntualmente ma non uniformemente a f su $]-2,0]$ (d) $\{f_n\}$ converge uniformemente a f su $]-2,0]$ (e) $\{f_n\}$ converge puntualmente ma non uniformemente a f su $[0,1]$ (f) $\{f_n\}$ converge uniformemente a f su $[-1,-1/2]$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{C}}$: (c), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (d), (f)

---

8. Sia data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ dove

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \frac{3}{n} \\ [4(nx-3) + \frac{1}{n}]^{-n} & \text{se } \frac{3}{n} < x \leq \frac{4}{n} \\ 4^{-n} & \text{se } x > \frac{4}{n}. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge puntualmente e totalmente in $]0,+\infty[$ (b) per ogni $a > 0$ la serie converge totalmente in $[a,+\infty[$ (c) la somma della serie è una funzione discontinua in $]4,+\infty[$ (d) la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (e) la somma della serie è derivabile in $]4,+\infty[$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (b), (d), (e) $\boxed{\text{F}}$: (b), (e)
