Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. Sia data la successione di funzioni
$$f_n(x) = \frac{3}{n} 2^{-e^n x^2}$$
e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il suo limite puntuale. Siano F_n e F le primitive di f_n e f che valgono zero per $x = 0$. Allora delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente ma non uniformemente a f su $\mathbb{R}$ (b) f_n converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$ (c) $F_n \to F$ puntualmente in $\mathbb{R}$ (d) f_n' converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (e) f_n' converge puntualmente solo per $x \geq 0$

le uniche corrette

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{D}}$: (b) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c)

2. Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ dove $a_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan^{2n-1}(2x)}{1+4x^2}\, dx$. Delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge semplicemente ma non assolutamente (b) la serie converge assolutamente (c) la successione delle somme parziali non è monotona (d) la successione delle somme parziali non è limitata (e) la serie non converge

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c) $\boxed{\text{D}}$: (c), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (d), (e) $\boxed{\text{F}}$: (e)

3. Si consideri la serie trigonometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} \left[n^4 + 2\ln(n+1)\right]^\alpha \cos((2n+1)x)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: per ogni $\alpha < -\frac{1}{2}$ la somma della serie è una funzione derivabile in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: per ogni $\alpha < 0$ la serie converge puntualmente ma non uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: esiste $\alpha > 0$ tale che la serie non converge in alcun punto di $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: esiste $\alpha < 0$ tale che la serie non converge in alcun punto di $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: esiste $\alpha > 0$ tale che la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: per ogni $-\frac{1}{8} < \alpha < 0$ la serie trigonometrica è la serie di Fourier di una funzione 2π-periodica in $\mathbb{R}$ integrabile su $[0, 2\pi]$

---

4. La trasformata di Fourier di $u(x) = x^2 \mathrm{sign}(x) \chi_{[-1,1]}(x)$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $2\frac{\cos(\xi)}{\xi} - 4i\frac{\sin(\xi)}{\xi^2} - 4i\frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$ $\boxed{\text{B}}$: $2\frac{\cos(\xi)}{\xi} - 4\frac{\sin(\xi)}{\xi^2} - 4\frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$ $\boxed{\text{C}}$: $2i\frac{\cos(\xi)}{\xi} + 4i\frac{\sin(\xi)}{\xi^2} - 4i\frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$ $\boxed{\text{D}}$: $2i\frac{\cos(\xi)}{\xi} - 4i\frac{\sin(\xi)}{\xi^2} - 4i\frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$ $\boxed{\text{E}}$: $2i\frac{\cos(\xi)}{\xi} - 4i\frac{\sin(\xi)}{\xi^2} + 4i\frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$ $\boxed{\text{F}}$: $2i\frac{\cos(\xi)}{\xi} + 4i\frac{\sin(\xi)}{\xi^2} + 4i\frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$

---

5. Sia data

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{7}\left[1 - 2n^3\right]\left(|x| - \frac{7}{n^2}\right) & \text{se } |x| \le \frac{7}{n^2} \\ \frac{1}{n^2} & \text{se } |x| > \frac{7}{n^2} \end{cases}$$

e si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Allora delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) la somma della serie è una funzione continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (c) la serie converge uniformemente su ogni intervallo del tipo $[A, +\infty[$ con $A > 0$ (d) la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\, dx$ è convergente (e) la serie non converge totalmente in $]0, +\infty[$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (c) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{E}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{F}}$: (a), (e)

---

6. Sia data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2 + \frac{\cos n}{2n}\right)^{2n} (x+y)^n$, dove $x \in [0,1]$ e $y \in [0,1]$. Detto D l'insieme degli (x, y) tali per cui la serie converge, l'area di D vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 8 $\boxed{\text{B}}$: 32 $\boxed{\text{C}}$: 1/32 $\boxed{\text{D}}$: 1/8 $\boxed{\text{E}}$: $\frac{\pi}{16}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{\pi}{64}$.

---

7. L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{(x-\sin x)^\beta \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{2\alpha}}\, dx$ converge se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\beta - 1 < 2\alpha < 3\beta + 1$ $\boxed{\text{B}}$: $\beta - 1 < 2\alpha$ $\boxed{\text{C}}$: $\beta - 1 < 2\alpha < 3\beta - 1$ $\boxed{\text{D}}$: $\beta + 1 < 2\alpha < 3\beta + 1$ $\boxed{\text{E}}$: $2\alpha < 3\beta + 1$ $\boxed{\text{F}}$: $2\alpha < 3\beta - 1$

---

8. La trasformata di Laplace della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' - y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 5 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s-1}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s-1}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s-1}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+2}$ $\boxed{\text{E}}$: $-\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s-1}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s-1}$

---

1. Sia data la successione di funzioni
$$f_n(x) = \frac{3}{n} 2^{-e^n x^2}$$
e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il suo limite puntuale. Siano F_n e F le primitive di f_n e f che valgono zero per $x = 0$. Allora delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente ma non uniformemente a f su $\mathbb{R}$ (b) f_n converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$ (c) $F_n \to F$ puntualmente in $\mathbb{R}$ (d) f_n' converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (e) f_n' converge puntualmente solo per $x \geq 0$

le uniche corrette

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{D}}$: (b) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c)

---

2. Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ dove $a_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan^{2n-1}(2x)}{1+4x^2}\, dx$. Delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge semplicemente ma non assolutamente (b) la serie converge assolutamente (c) la successione delle somme parziali non è monotona (d) la successione delle somme parziali non è limitata (e) la serie non converge

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c) $\boxed{\text{D}}$: (c), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (d), (e) $\boxed{\text{F}}$: (e)

---

3. Si consideri la serie trigonometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} \left[n^4 + 2\ln(n+1)\right]^\alpha \cos((2n+1)x)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: per ogni $\alpha < -\frac{1}{2}$ la somma della serie è una funzione derivabile in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: per ogni $\alpha < 0$ la serie converge puntualmente ma non uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: esiste $\alpha > 0$ tale che la serie non converge in alcun punto di $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: esiste $\alpha < 0$ tale che la serie non converge in alcun punto di $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: esiste $\alpha > 0$ tale che la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: per ogni $-\frac{1}{8} < \alpha < 0$ la serie trigonometrica è la serie di Fourier di una funzione 2π-periodica in $\mathbb{R}$ integrabile su $[0, 2\pi]$

---

4. La trasformata di Fourier di $u(x) = x^2 \text{sign}(x) \chi_{[-1,1]}(x)$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $2\frac{\cos(\xi)}{\xi} - 4i\frac{\sin(\xi)}{\xi^2} - 4i\frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$ $\boxed{\text{B}}$: $2\frac{\cos(\xi)}{\xi} - 4\frac{\sin(\xi)}{\xi^2} - 4\frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$ $\boxed{\text{C}}$: $2i\frac{\cos(\xi)}{\xi} + 4i\frac{\sin(\xi)}{\xi^2} - 4i\frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$ $\boxed{\text{D}}$: $2i\frac{\cos(\xi)}{\xi} - 4i\frac{\sin(\xi)}{\xi^2} - 4i\frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$ $\boxed{\text{E}}$: $2i\frac{\cos(\xi)}{\xi} - 4i\frac{\sin(\xi)}{\xi^2} + 4i\frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$ $\boxed{\text{F}}$: $2i\frac{\cos(\xi)}{\xi} + 4i\frac{\sin(\xi)}{\xi^2} + 4i\frac{\cos(\xi)-1}{\xi^3}$

---

5. Sia data
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{7}\left[1 - 2n^3\right]\left(|x| - \frac{7}{n^2}\right) & \text{se } |x| \leq \frac{7}{n^2} \\ \frac{1}{n^2} & \text{se } |x| > \frac{7}{n^2} \end{cases}$$
e si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Allora delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) la somma della serie è una funzione continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (c) la serie converge uniformemente su ogni intervallo del tipo $[A, +\infty[$ con $A > 0$ (d) la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-1}^1 f_n(x)\, dx$ è convergente (e) la serie non converge totalmente in $]0, +\infty[$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (c) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{E}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{F}}$: (a), (e)

---

6. Sia data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2 + \frac{\cos n}{2n}\right)^{2n} (x+y)^n$, dove $x \in [0,1]$ e $y \in [0,1]$. Detto D l'insieme degli (x,y) tali per cui la serie converge, l'area di D vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 8 $\boxed{\text{B}}$: 32 $\boxed{\text{C}}$: 1/32 $\boxed{\text{D}}$: 1/8 $\boxed{\text{E}}$: $\frac{\pi}{16}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{\pi}{64}$.

---

7. L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{(x-\sin x)^\beta \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{2\alpha}}\, dx$ converge se e solo se

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\beta - 1 < 2\alpha < 3\beta + 1$ $\boxed{\text{B}}$: $\beta - 1 < 2\alpha$ $\boxed{\text{C}}$: $\beta - 1 < 2\alpha < 3\beta - 1$ $\boxed{\text{D}}$: $\beta + 1 < 2\alpha < 3\beta + 1$ $\boxed{\text{E}}$: $2\alpha < 3\beta + 1$ $\boxed{\text{F}}$: $2\alpha < 3\beta - 1$

---

8. La trasformata di Laplace della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' - y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 5 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

   vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s-1}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s-1}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s-1}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+2}$ $\boxed{\text{E}}$: $-\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s-1}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s-1}$
