Cognome e Nome.............................................. Matricola .......................

Firma......................................... Corso di Laurea: ♢ AMBLT ♢ CIVLT

**Istruzioni**

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere Cognome e Nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 90 min.
3. Su ogni foglio protocollo scrivere Cognome, Nome, numero di matricola. Usare i fogli protocollo per la minuta dei calcoli (brutta copia) e come bella copia per l'esposizione dello svolgimento degli esercizi e per le domande di teoria. Ogni cosa va esposta e giustificata con completezza. Al termine si consegnano *tutti* i fogli protocollo.

## ESERCIZI

1. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+7x^2y^2) - \sin(\alpha x^2 y^2)}{(x^2+y^2)^{7/2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette giustificando le risposte date.
(a) $f$ è continua in $(0,0)$ per ogni $\alpha$, (b) $f$ è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha = 7$, (c) $f$ è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha = 2$, (d) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ per ogni $\alpha$, (e) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ se e solo se $\alpha = 2$, (f) $f$ è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha = 7$.

**Punteggio: 7**

2. L'integrale

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\Gamma,$$

ove $\overrightarrow{F}(x,y) = y\,\vec{i} - x\,\vec{j}$ e la curva $\Gamma$ è parametrizzata da

$$\overrightarrow{r}(t) := \sin^3(t)\,\vec{i} + \cos^3(t)\,\vec{j}, \qquad t \in \left[0, \tfrac{3}{4}\pi\right],$$

vale

*Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : $\frac{3}{32}\pi$ $\boxed{\text{B}}$ : $\frac{3}{2}\pi$ $\boxed{\text{C}}$ : $\frac{9}{32}\pi$ $\boxed{\text{D}}$ : $0$ $\boxed{\text{E}}$ : $\pi$ $\boxed{\text{F}}$ : $\frac{3}{8}\pi$

**Punteggio: 6**

3. Data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n+1)^\alpha (n+1)}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \geq 0,$$

determinare al variare di $\alpha$ gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme.

**Punteggio: 7**

---

## DOMANDE DI TEORIA

---

**Domanda 1.**

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto e siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, $f, g \in C^1(A)$. Sia inoltre $(x_0, y_0) \in A$ un punto di estremo per $f$ sotto la condizione di vincolo $g(x, y) = 0$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) Se $\nabla g(x_0, y_0) \neq \vec{0}$, allora esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$.

(b) Se esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$, allora $\nabla g(x_0, y_0) \neq \vec{0}$.

(c) Se $\nabla g(x_0, y_0) \neq \vec{0}$, allora esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che $(x_0, y_0, \lambda_0)$ è un punto stazionario per la funzione Lagrangiana $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$.

**Punteggio: 6**

---

**Domanda 2.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso e sia $F = (F_1, F_2) : A \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe $C^1(A)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) Se per ogni $(x, y) \in A$ vale

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = 0$$

allora $F$ è conservativo in $A$.

(b) Se $F$ non è conservativo in $A$ allora per ogni curva $\Gamma$ regolare a tratti, chiusa, a valori in $A$, vale

$$\oint_\Gamma F \cdot d\Gamma \neq 0\,.$$

(c) Se per ogni curva chiusa $\Gamma$ regolare a tratti a valori in $A$ vale

$$\oint_\Gamma F \cdot d\Gamma = 0\,,$$

allora $F$ è conservativo in $A$.

**Punteggio: 6**

---