Nome, Cognome, Matricola:

Tempo a disposizione: 90 minuti

ESERCIZI

1. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos^2(x(1+y)) - 1 + x^2}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette giustificando le risposte date

(a) f è continua in $(0,0)$ per ogni $\alpha \leq \frac{3}{2}$ (b) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (c) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ per ogni $\alpha < \frac{3}{2}$ (d) f ammette in $(0,0)$ tutte le derivate direzionali per ogni $\alpha \leq 1$

(e) Se $\alpha = 1$, allora f è differenziabile in $(0,0)$.

Punteggio: 7

2. Sia Γ la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j}$ $t \in [0,1]$
e sia $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale dato da

$$\vec{F}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,\vec{j}\,.$$

L'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$$

vale

$\boxed{A} : \sqrt{3}-1$ $\boxed{B} : \sqrt{2}-1$ $\boxed{C} : \sqrt{2}+1$ $\boxed{D} : \sqrt{3}$ $\boxed{E} : \sqrt{3}-2$ $\boxed{F} : 0$

Punteggio: 6

3. Sia $\alpha > 0$. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\,\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{(n+x)^\alpha}, \qquad x \in [0,+\infty),$$

stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette giustificando le risposte date

(a) la serie converge puntualmente in $[0,+\infty)$ per ogni $\alpha > 1$ (b) la serie converge puntualmente in $[0,+\infty)$ se e solo se $\alpha \geq 2$ (c) la serie converge totalmente in $[0,+\infty)$ se e solo se $\alpha \geq 2$ (d) la serie converge totalmente in $[0,+\infty)$ se e solo se $\alpha > 2$

Punteggio: 7

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1.

Siano $f, f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e $n \in \mathbb{N}$.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date.

(a) Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$ allora $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

(b) Se f_n sono continue in $[a,b]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

(c) Se f_n sono integrabili e $f_n \geq 0$ in $[a,b]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e tali che la successione $\{f_n\}$ converga uniformemente a f in $[a,b]$, allora f è integrabile in $[a,b]$ e vale

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0\,.$$

Punteggio: 6

Domanda 2.

Enunciare un teorema di esistenza globale della soluzione di un problema di Cauchy del primo ordine. Dare un esempio di problema di Cauchy per il quale vale il teorema enunciato e un esempio a cui il teorema non si applica.

Punteggio: 6
