Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.. Corso di Laurea: ◊ AMBLT ◊ CIVLT

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere Cognome e Nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 75 min.
3. Su ogni foglio protocollo scrivere Cognome, Nome, numero di matricola. Usare i fogli protocollo per la minuta dei calcoli (brutta copia) e come bella copia per l'esposizione dello svolgimento degli esercizi e per le domande di teoria. Ogni cosa va esposta e giustificata con completezza. Al termine si consegnano *tutti* i fogli protocollo.

ESERCIZI

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = (x^2+y^2-1)^2 - 4x^2$. Allora

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $(\pm\sqrt{3},0)$ sono punti di minimo relativo, $(0,\pm1)$ sono di massimo relativo e $(0,0)$ è di sella $\boxed{\text{B}}$: $(\pm\sqrt{3},0)$ sono punti di massimo relativo, $(0,\pm1)$ sono di sella e $(0,0)$ è di minimo relativo $\boxed{\text{C}}$: $(\pm\sqrt{3},0)$ sono punti di massimo relativo, $(0,\pm1)$ sono di minimo relativo e $(0,0)$ è di sella $\boxed{\text{D}}$: $(\pm\sqrt{3},0)$ sono punti di minimo relativo, $(0,\pm1)$ sono di sella e $(0,0)$ è di massimo relativo $\boxed{\text{E}}$: $(\pm\sqrt{3},0)$ sono punti di sella, $(0,\pm1)$ sono di minimo relativo e $(0,0)$ è di massimo relativo $\boxed{\text{F}}$: $(\pm\sqrt{3},0)$ sono punti di sella, $(0,\pm1)$ sono di massimo relativo e $(0,0)$ è di minimo relativo

   Punteggio: 6

2. Si consideri l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2xy \le z \le x^2+y^2\,,\ x^2+y^2 \le 1\}.$$

   Calcolare

$$I = \iiint_V x^2\, dxdydz.$$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\sqrt{3}/2$ $\boxed{\text{B}}$: $3\pi/2$ $\boxed{\text{C}}$: $\sqrt{3}$ $\boxed{\text{D}}$: 3π $\boxed{\text{E}}$: $\pi/6$

   Punteggio: 7

3. Data la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{n}\,x}{(1+nx^2)\,\log(n)}\,, \qquad x \in [0,+\infty[\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, n \ge 2\,,$$

   (a) determinare il suo insieme I di convergenza puntuale;

   (b) stabilire se la successione converge uniformemente in I;

(c) stabilire se la successione $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente in I;

(d) dire se vale il passaggio al limite per f_n sotto il segno di integrale sull'insieme $[0,1]$.

Punteggio: 7

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$. Sia inoltre $(x_0, y_0) \in A$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) Se f ammette in (x_0, y_0) tutte le derivate direzionali ed esse sono nulle, allora f è continua in (x_0, y_0).

(b) Se f è differenziabile in A e vale $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, allora f ammette in (x_0, y_0) tutte le derivate direzionali ed esse sono nulle.

Punteggio: 4

Domanda 2. Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni continue e derivabili. Si supponga che la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ sia totalmente convergente in I. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) Per ogni $x \in I$ fissato, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|$ è convergente.

(b) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$, ottenuta derivando la serie data termine a termine, è convergente puntualmente in I.

(c) Detta $S(x)$ la somma della serie, vale $\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$ per ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset I$.

Punteggio: 6
