Analisi Matematica II 11 Gennaio 2021

Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.. Corso di Laurea: ♢ AMBLT ♢ CIVLT

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere Cognome e Nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 75 min.
3. Su ogni foglio protocollo scrivere Cognome, Nome, numero di matricola. Usare i fogli protocollo per la minuta dei calcoli (brutta copia) e come bella copia per l'esposizione dello svolgimento degli esercizi e per le domande di teoria. Ogni cosa va esposta e giustificata con completezza. Al termine si consegnano *tutti* i fogli protocollo.

ESERCIZI

---

1. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y\sin(x^2) - x\arctan(xy)}{(x^2+y^2)^{\alpha+3}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette giustificando le risposte date.
(a) f è continua in $(0,0)$ per ogni α, (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ per ogni α, (c) per $\alpha < 0$ esistono tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ e sono nulle, (d) per $\alpha > 0$ esistono tutte le derivate in $(0,0)$ nelle direzioni $v = (\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$ e sono nulle, (e) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 0$.

Punteggio: 7

---

2. Sia Γ la curva di rappresentazione parametrica

$$\vec{r}(t) = (\cos t - t\sin t)\,\vec{i} + (\sin t + t\cos t)\,\vec{j} \quad t \in [0, 2\pi].$$

L'integrale curvilineo $\int_\Gamma \sqrt{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2+3)}\,ds$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $4\pi^2(\pi^2+2)$ $\boxed{\text{B}}$: $2\pi^2(\pi^2+2)$ $\boxed{\text{C}}$: $\pi^2(\pi^2+2)$ $\boxed{\text{D}}$: $\pi^2(\pi^2+2)-1$ $\boxed{\text{E}}$: $\pi^2(\pi^2+2)-2$ $\boxed{\text{F}}$: π^2+2

Punteggio: 6

---

3. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^y(y^2-4) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza ed unicità locale e globale della soluzione;

(b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) per $-1 < y_0 < 1$ provare che la soluzione è definita globalmente in $\mathbb{R}$ e calcolarne il limite per $t \to +\infty$ utilizzando il teorema dell'asintoto;

(d) per $-2 < y_0 < 2$ studiare la concavità/convessità della soluzione.

Punteggio: 7

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1. Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e siano f, $f_n : I \to \mathbb{R}$, per $n \in \mathbb{N}$. Si supponga che la successione di funzioni $\{f_n\}$ sia uniformemente convergente a f in I. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) Per ogni $x \in I$ fissato, la successione $\{|f_n(x)|\}$ è convergente. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(Suggerimento: si ricordi la disuguaglianza $||a| - |b|| \leq |a - b|$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$.)

(b) Supposto che le f_n siano integrabili su un intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset I$, vale $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Punteggio: risposta corretta: +2, risposta non data: 0, risposta errata: -0.5

Domanda 2. Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, sia R il suo raggio di convergenza, con $0 < R < +\infty$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) La serie converge puntualmente nell'intervallo $[-R, R]$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(b) Se la serie converge per $x = R$, allora converge totalmente e uniformemente nell'intervallo $[0, R]$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(c) Se la serie converge assolutamente per $x = R$, allora converge assolutamente anche per $x = -R$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Punteggio: risposta corretta: +2, risposta non data: 0, risposta errata: -0.5
