Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma... Corso di Laurea: ♢ AMBLT ♢ CIVLT

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere Cognome e Nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 75 min.
3. Su ogni foglio protocollo scrivere Cognome, Nome, numero di matricola. Usare i fogli protocollo per la minuta dei calcoli (brutta copia) e come bella copia per l'esposizione dello svolgimento degli esercizi e per le domande di teoria. Ogni cosa va esposta e giustificata con completezza. Al termine si consegnano *tutti* i fogli protocollo.

ESERCIZI

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log\left(\cos^2(xy) + (xy)^4\right)}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq 2$.

(b) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) f ammette tutte le derivate direzionali se e solo se $\alpha \leq 3/2$.

(d) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 3/2$.

Punteggio: 7

2. Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ la curva di rappresentazione parametrica

$$\vec{r}(t) = \left(e^t - e^{-t}\ ,\ e^t + e^{-t}\right) \qquad t \in [0,1].$$

L'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2}\, ds \qquad \text{vale}$$

$\boxed{A}$: $e^2 - 1$ $\boxed{B}$: $2(e^2-1)$ $\boxed{C}$: $e^2 - e^{-2}$ $\boxed{D}$: $2(e^2 - e)$ $\boxed{E}$: $e - e^{-1}$

Punteggio: 6

3. Data la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \left[\sqrt{1+n^{2\alpha}} - n^{\alpha}\right], \qquad x \in \mathbb{R}\,, \quad \alpha \geq 0,$

determinare al variare di α gli insiemi di convergenza puntuale e totale.

Punteggio: 7

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto e sia $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe $C^1(A)$. Sia $C \subset A$ una corona circolare. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) Se F è conservativo in A, allora

$$\iint_C \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \right) dxdy = 0.$$

(b) Se esiste una curva Γ a valori in C, regolare a tratti, chiusa e tale che

$$\oint_\Gamma F \cdot d\Gamma = 0$$

allora F è conservativo in C.

(c) Se F è irrotazionale in C, allora F è conservativo in C.

Punteggio: 6

Domanda 2. Enunciare il Teorema della convergenza uniforme per le serie di Fourier.

Punteggio: 4
