Cognome e Nome .... Matricola ....

Firma .... Corso di Laurea: ♢ AMBLT ♢ CIVLT

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere Cognome e Nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 90 min.
3. Su ogni foglio protocollo scrivere Cognome, Nome, numero di matricola. Usare i fogli protocollo per la minuta dei calcoli (brutta copia) e come bella copia per l'esposizione dello svolgimento degli esercizi e per le domande di teoria. Ogni cosa va esposta e giustificata con completezza. Al termine si consegnano *tutti* i fogli protocollo.

ESERCIZI

1. Sia
$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ x^2F^2 \leq y \leq \sqrt{xF}\,\right\}$$
e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = y - x$. Determinare
$$m = \min_T f \qquad \text{e} \qquad M = \max_T f.$$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = 0,\ M = \frac{F}{4}$ $\boxed{\text{B}}$: $m = -\frac{1}{4F^2},\ M = 0$ $\boxed{\text{C}}$: $m = \frac{1}{8F^2},\ M = \frac{F}{4}$ $\boxed{\text{D}}$: $m = -\frac{1}{4F^2},\ M = \frac{F}{4}$ $\boxed{\text{E}}$: $m = \frac{1}{4},\ M = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Punteggio: 6 Risposta D

2. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie cartesiana data da
$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ (F + 1) \leq x^2 + y^2 \leq (F + 1)^2,\ z = \log(x^2 + y^2)\right\}$$
e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Calcolare l'integrale di superficie
$$\iint_S f\, dS$$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{4\pi}{3}\left[(5+F)^{3/2} - (4+(F+1)^2)^{3/2}\right]$ $\boxed{\text{B}}$: $2\pi\left[(4+(F+1)^2)^{1/2} - (5+F)^{1/2}\right]$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{2\pi}{3}\left[(4+(F+1)^2)^{3/2} - (5+F)^{3/2}\right]$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{\pi}{2}\left[(4+(F+1)^2)^{1/2} - (5+F)^{1/2}\right]$ $\boxed{\text{E}}$: $2\pi\left[(4+(F+1)^2)^{3/2} - (5+F)^{3/2}\right]$

Punteggio: 7 Risposta C

3. Sia $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la successione di funzioni data da

$$f_n(x) = \arctan\left(1 + \frac{x^n}{n^2\, F^n}\right), \qquad x \geq 0, \qquad n \geq 1.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente in $[0, +\infty)$ (b) f_n converge uniformemente in $[0, +\infty)$ (c) f_n converge uniformemente in $[0, F]$ (d) la funzione limite $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ è continua in $[0, +\infty)$ (e) la funzione limite f è limitata in $[0, +\infty)$,

tutte e sole quelle corrette sono

$\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (c), (d) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{C}}$: (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e)

Punteggio: 7 Risposta: B

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1.

Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e $(x_0, y_0) \in A$.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date.

(a) Se f ammette le derivate parziali in un intorno di (x_0, y_0) ed esse sono continue in (x_0, y_0), allora vale la formula

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v} \qquad \text{per ogni versore } \vec{v} \in \mathbb{R}^2\,.$$

(b) Se f ammette tutte le derivate direzionali in (x_0, y_0) allora f è continua in (x_0, y_0).

(c) Se vale $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$ allora (x_0, y_0) è un punto di estremo per f.

Punteggio: 6 risp. VFF

Domanda 2.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $2\pi-$periodica definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = (F+1)|x|$ e prolungata per periodicità.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date.

(a) La serie di Fourier di f è

$$\frac{(F+1)\pi}{2} + \frac{2(F+1)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos(nx).$$

(b) Essa converge puntualmente a f in $\mathbb{R}$.

(c) Essa converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$.

Punteggio: 6 risp: VVV
