Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma... Corso di Laurea: ◊ AMBLT ◊ CIVLT

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere Cognome e Nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 90 min.
3. Su ogni foglio protocollo scrivere Cognome, Nome, numero di matricola. Usare i fogli protocollo per la minuta dei calcoli (brutta copia) e come bella copia per l'esposizione dello svolgimento degli esercizi e per le domande di teoria. Ogni cosa va esposta e giustificata con completezza. Al termine si consegnano *tutti* i fogli protocollo.

ESERCIZI

1. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2y\log(1+x^2y^2)-x^2\sin(y^3)}{y(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} & \text{se } y \neq 0, \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette giustificando le risposte date.
(a) f è continua in $(0,0)$ per ogni α, (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ per ogni α, (c) per $\alpha < 3$ esistono tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ e sono nulle, (d) per $\alpha \leq 3$ esistono tutte le derivate direzionali in $(0,0)$, (e) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 3$.

Punteggio: 7

2. Dato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y) = ye^x\big(A\sin x + \cos x + B\cos y\big)\vec{i} + e^x\big(\sin x + C\cos y - 2y\sin y\big)\vec{j}$$

si determinino A, B e C in modo tale che $\vec{F}$ sia conservativo. Per tali valori di A, B e C l'integrale curvilineo $I = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\Gamma$, dove Γ è il segmento che congiunge i punti $(0,0)$ e (π,π) percorso dal primo punto al secondo, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: e^π $\boxed{\text{B}}$: $-\pi e^\pi$ $\boxed{\text{C}}$: $-2\pi e^\pi$ $\boxed{\text{D}}$: $2\pi e^\pi$ $\boxed{\text{E}}$: 3π $\boxed{\text{F}}$: $-4\pi e^\pi$

Punteggio: 7

3. Al variare di $\alpha > 0$, studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = n^\alpha \arctan\left(\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Punteggio: 7

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1. Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, sia R il suo raggio di convergenza, con $0 < R < +\infty$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) La serie converge assolutamente nell'intervallo $(-R, R)$.

(b) Se la serie converge assolutamente per $x = R$, allora converge assolutamente anche per $x = -R$.

(c) Se la serie converge per $x = R$, allora converge uniformemente nell'intervallo $[0, R]$.

Punteggio: 6

Domanda 2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$. Sia inoltre $\vec{x}_0 \in A$ un punto stazionario per f e $H_f(\vec{x}_0)$ la matrice hessiana di f in $\vec{x}_0$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) Se gli autovalori di $H_f(\vec{x}_0)$ sono $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$, allora il test della matrice hessiana è inefficace.

(b) Se $\det H_f(\vec{x}_0) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$, allora $\vec{x}_0$ è un punto di massimo o di minimo relativo.

(c) Se gli autovalori di $H_f(\vec{x}_0)$ sono $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$, allora $\vec{x}_0$ è un punto di sella.

Punteggio: 6
