Analisi Matematica II 16 Giugno 2022

Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.. Corso di Laurea: ♢ AMBLT ♢ CIVLT

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere Cognome e Nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 75 min.
3. Su ogni foglio protocollo scrivere Cognome, Nome, numero di matricola. Usare i fogli protocollo per la minuta dei calcoli (brutta copia) e come bella copia per l'esposizione dello svolgimento degli esercizi e per le domande di teoria. Ogni cosa va esposta e giustificata con completezza. Al termine si consegnano *tutti* i fogli protocollo.

ESERCIZI

---

1. Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}$. Siano $g(x, y) = e^{y^2-(x-1)^2}$ e $M = \max_D g$ e $m = \min_D g$. Allora

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $M = e^4$ e $m = e^{-4}$ $\boxed{\text{B}}$: $M = e^{7/2}$ e $m = 1$ $\boxed{\text{C}}$: $M = e^{7/2}$ e $m = e^{-9}$ $\boxed{\text{D}}$: $M = e^{9/2}$ e $m = e^{-9}$ $\boxed{\text{E}}$: $M = e^3$ e $m = e^{-9}$

   Punteggio: 6

---

2. L'area della superficie

   $$S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 - 2y,\ x^2 + y^2 - 2y \leq 3,\ x \geq 0\Big\}$$

   vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{\pi}{12}\Big(17^{3/2} - 1\Big)$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{\pi}{9}\Big(17^{3/2} - 1\Big)$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{\pi}{12}\Big(17^{5/2} + 1\Big)$

   $\boxed{\text{D}}$: $\frac{\pi}{8}\Big(17^{5/2} - 1\Big)$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{\pi}{6}\Big(17^{3/2} + 1\Big)$

   Punteggio: 7

---

3. Sia data la serie di funzioni

   $$\sum_{n=1}^{\infty} (x^2 - 1)^n \left(\sqrt{1 + n^{2\alpha}} - n^{\alpha}\right).$$

   Determinare l'insieme della convergenza puntuale e totale al variare di $\alpha \geq 0$.

   Punteggio: 7

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = te^{-y(t)}\left(y^2(t) - 4\right) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$,

(a) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(b) per $|y_0| < 2$ discutere l'esistenza globale della soluzione;

(c) per $|y_0| < 2$ calcolare il limite della soluzione $y(t)$ per $t \to +\infty$ (*suggerimento*: utilizzare il teorema dell'asintoto).

Punteggio: 6

Domanda 2. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ un campo differenziabile in A, $(x_0, y_0) \in A$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) Se $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$, allora (x_0, y_0) è un punto di estremo per f.

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = 0$ per ogni versore $\vec{v}$ di $\mathbb{R}^2$ se e solo se $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$.

Punteggio: 4
