ANALISI MATEMATICA II 17 Giugno 2021

Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.. Corso di Laurea: ♢ AMBLT ♢ CIVLT

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere Cognome e Nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 75 min.
3. Su ogni foglio protocollo scrivere Cognome, Nome, numero di matricola. Usare i fogli protocollo per la minuta dei calcoli (brutta copia) e come bella copia per l'esposizione dello svolgimento degli esercizi e per le domande di teoria. Ogni cosa va esposta e giustificata con completezza. Al termine si consegnano *tutti* i fogli protocollo.

ESERCIZI

---

1. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 3 \leq x+y \leq 6,\ 1 \leq y \leq 2x\}$ e sia $f : D \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = xy$. Siano $M = \max_D f$ e $m = \min_D f$. Allora

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $M = 6,\ m = 2$ $\boxed{\text{B}}$: $M = 5,\ m = 3$ $\boxed{\text{C}}$: $M = 8,\ m = 3$ $\boxed{\text{D}}$: $M = 4,\ m = 2$ $\boxed{\text{E}}$: $M = 9,\ m = 2$ $\boxed{\text{F}}$: $M = 4,\ m = 1$

   Punteggio: 6

---

2. Si consideri l'insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2xy \leq z \leq \frac{x^2}{4} + 4y^2,\ \frac{x^2}{4} + 4y^2 \leq 1\}.$$

   Usando il teorema della divergenza calcolare il flusso (uscente) attraverso la superficie di contorno di V del campo

$$\vec{F}(x,y,z) = \cos(yz)\,\vec{i} + \sin(xz)\,\vec{j} + z\,\vec{k}\,.$$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\sqrt{3}/2$ $\boxed{\text{B}}$: $\pi/2$ $\boxed{\text{C}}$: $3\pi/4$ $\boxed{\text{D}}$: $\sqrt{3}$ $\boxed{\text{E}}$: 3π

   Punteggio: 7

---

3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(n!)^\alpha}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Determinare il suo insieme I_α di convergenza puntuale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;

   (b) per $\alpha = 0$ stabilire se la serie converge uniformemente in $I_0 \cap [0,1]$;

   (c) per $\alpha \geq 0$ stabilire se la serie delle derivate converge puntualmente in I_α.

Punteggio: 7

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$. Sia inoltre $(x_0, y_0) \in A$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) Se f è continua in (x_0, y_0) e inoltre ammette in (x_0, y_0) tutte le derivate parziali, allora f è differenziabile in (x_0, y_0).

(b) Se f è differenziabile in A, allora f ammette in (x_0, y_0) le derivate parziali ed esse sono continue.

Punteggio: 4

Domanda 2. Sia I un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e siano f, $f_n : I \to \mathbb{R}$, per $n \in \mathbb{N}$. Si supponga che le funzioni f_n siano derivabili in I e che la successione di funzioni $\{f_n\}$ sia puntualmente convergente a f in I. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) Se f ammette un punto di discontinuità in $x_0 \in I$, allora $\{f_n\}$ non converge uniformemente in I.

(b) Se $f_n \to f$ uniformemente in I e $f_n' \to g$ puntualmente in I, allora f è derivabile in I e vale $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in I$.

(c) Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ è puntualmente convergente in I, allora la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente in I a $f(x) \equiv 0$.

Punteggio: 6
