Analisi Matematica II 1 Febbraio 2022

Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.. Corso di Laurea: ◇ AMBLT ◇ CIVLT

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere Cognome e Nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 75 min.
3. Su ogni foglio protocollo scrivere Cognome, Nome, numero di matricola. Usare i fogli protocollo per la minuta dei calcoli (brutta copia) e come bella copia per l'esposizione dello svolgimento degli esercizi e per le domande di teoria. Ogni cosa va esposta e giustificata con completezza. Al termine si consegnano *tutti* i fogli protocollo.

ESERCIZI

---

1. Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 2y^2 \leq 2\}$. Siano $g(x, y) = e^{xy}$ e $M = \max_D g$ e $m = \min_D g$. Allora

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $M = e^{\sqrt{2}}$ e $m = \frac{1}{e^{1/\sqrt{2}}}$ $\boxed{\text{B}}$: $M = e^{1/\sqrt{2}}$ e $m = \frac{1}{e^{\sqrt{2}}}$ $\boxed{\text{C}}$: $M = e^{1/\sqrt{2}}$ e $m = \frac{1}{e^{1/\sqrt{2}}}$ $\boxed{\text{D}}$: $M = 1$ e $m = \frac{1}{e^{\sqrt{2}}}$ $\boxed{\text{E}}$: $M = e^{\sqrt{2}}$ e $m = 1$

   Punteggio: 6

---

2. L'integrale di superficie
$$\iint_S \frac{z}{\sqrt{1 + 9x^2 + 9y^2}}\, dS$$
   dove $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3xy,\, x^2 + y^2 - 2x \leq 0,\, y \geq 0\}$ vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 2π $\boxed{\text{B}}$: 2 $\boxed{\text{C}}$: $3/2$ $\boxed{\text{D}}$: $3\pi/2$ $\boxed{\text{E}}$: π

   Punteggio: 7

---

3. Data la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da
$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2} \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{N},$$
   stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

   (a) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$

   (b) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$

   (c) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$

   (d) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente in $\mathbb{R}$

   Punteggio: 7

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$. Sia inoltre $\vec{x}_0 \in A$ un punto stazionario per f e $H_f(\vec{x}_0)$ la matrice hessiana di f in $\vec{x}_0$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) Se gli autovalori di $H_f(\vec{x}_0)$ sono $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$, allora il test della matrice hessiana è inefficace.

(b) Se gli autovalori di $H_f(\vec{x}_0)$ sono $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$, allora $\vec{x}_0$ è un punto di sella.

Punteggio: 4

Domanda 2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$. Sia inoltre $(x_0, y_0) \in A$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) Se f ammette in (x_0, y_0) tutte le derivate direzionali, allora f è continua in (x_0, y_0).

(b) Se f è differenziabile in A, allora f ammette in (x_0, y_0) tutte le derivate direzionali.

(c) Se f è differenziabile in A e vale $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, allora $f(x_0, y_0) = 0$.

Punteggio: 6
