ANALISI MATEMATICA II 1 Settembre 2022

Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.. Corso di Laurea: ♢ AMBLT ♢ CIVLT

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere Cognome e Nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 75 min.
3. Su ogni foglio protocollo scrivere Cognome, Nome, numero di matricola. Usare i fogli protocollo per la minuta dei calcoli (brutta copia) e come bella copia per l'esposizione dello svolgimento degli esercizi e per le domande di teoria. Ogni cosa va esposta e giustificata con completezza. Al termine si consegnano *tutti* i fogli protocollo.

ESERCIZI

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = xy(x + y - 2).$$

Allora f ammette

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: un punto di massimo relativo, un punto di minimo relativo e due punti di sella $\boxed{\text{B}}$: un punto di massimo relativo e tre punti di sella $\boxed{\text{C}}$: un punto di minimo relativo e tre punti di sella $\boxed{\text{D}}$: quattro punti di sella $\boxed{\text{E}}$: due punti di massimo relativo e due punti di sella $\boxed{\text{F}}$: due punti di minimo relativo e due punti di sella

Punteggio: 6

---

2. Dato

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ z \geq 0,\ 2z + 3(x-2) \leq 0\right\},$$

l'integrale triplo

$$\iiint_V x\, dxdydz$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{9\pi}{8}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{7\pi}{4}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{5\pi}{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{5\pi}{3}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{4\pi}{5}$

Punteggio: 7

---

3. Sia data la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da:

$$f_n(x) = 2xe^{n(x^2-9)} + \left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Determinare il suo insieme di convergenza puntuale ed uniforme.

Calcolare inoltre $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^3 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ e stabilire se vale la tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale sull'intervallo $[0,3]$.

Punteggio: 7

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$. Sia inoltre $(x_0, y_0) \in A$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) Se f è continua in (x_0, y_0) e inoltre ammette in (x_0, y_0) tutte le derivate parziali, allora f è differenziabile in (x_0, y_0).

(b) Se f è differenziabile in A, allora f ammette in (x_0, y_0) le derivate parziali ed esse sono continue.

Punteggio: 4

Domanda 2. Sia I un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e siano f, $f_n : I \to \mathbb{R}$, per $n \in \mathbb{N}$. Si supponga che le funzioni f_n siano derivabili in I e che la successione di funzioni $\{f_n\}$ sia puntualmente convergente a f in I. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) Se f ammette un punto di discontinuità in $x_0 \in I$, allora $\{f_n\}$ non converge uniformemente in I.

(b) Se $f_n \to f$ uniformemente in I e $f_n' \to g$ puntualmente in I, allora f è derivabile in I e vale $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in I$.

(c) Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ è puntualmente convergente in I, allora la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente in I a $f(x) \equiv 0$.

Punteggio: 6
