Analisi Matematica II 29 Marzo 2021

Cognome e Nome .... Matricola ....

Firma .... Corso di Laurea: ♢ AMBLT ♢ CIVLT

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere Cognome e Nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 75 min.
3. Su ogni foglio protocollo scrivere Cognome, Nome, numero di matricola. Usare i fogli protocollo per la minuta dei calcoli (brutta copia) e come bella copia per l'esposizione dello svolgimento degli esercizi e per le domande di teoria. Ogni cosa va esposta e giustificata con completezza. Al termine si consegnano *tutti* i fogli protocollo.

ESERCIZI

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y\arctan(x^2) - x\sin(y^2)}{x\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette giustificando le risposte date.
(a) f è continua in $(0,0)$, (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, (c) esistono tutte le derivate direzionali in $(0,0)$, (d) per $v = (v_1, v_2)$ con $v_1 \neq 0$ e $v_2 \neq 0$, esiste la derivata direzionale in $(0,0)$ se e solo se $v_1 = v_2$, (e) f è differenziabile in $(0,0)$.

Punteggio: 7

---

2. L'integrale di superficie

$$\iint_S \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\, dS$$

dove $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy,\ x^2+y^2 \leq 2,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}\, x\}$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 3π $\boxed{\text{B}}$: $\pi/3$ $\boxed{\text{C}}$: $\sqrt{3}/2$ $\boxed{\text{D}}$: $3\pi/2$ $\boxed{\text{E}}$: $\sqrt{3}$

Punteggio: 6

---

3. Data la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$f_n(x) = \frac{\log(1 + x\sqrt{n})}{1 + n^2x^2}, \qquad x \in [0, +\infty), \quad n \in \mathbb{N},$$

(a) determinare il suo insieme I di convergenza puntuale;
(b) stabilire se la successione converge uniformemente in I;
(c) stabilire se la successione $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente in I;
(d) dire se vale il passaggio al limite per $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sotto il segno di integrale sull'insieme $I \cap [0,1]$.

Può essere utile ricordare la maggiorazione $\log(1+t) \le t$, $\forall t > -1$.

Punteggio: 7

Risposte: (a) $I = [0, +\infty)$, (b) Sì, (c) No, solo per $x > 0$, (d) Sì

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso e sia $F = (F_1, F_2) : A \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe $C^1(A)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) Se per ogni $(x, y) \in A$ vale

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 0$$

allora F è conservativo in A.

(b) Se F non è conservativo in A allora esiste una curva Γ regolare a tratti, chiusa, a valori in A, tale che

$$\oint_\Gamma F \cdot d\Gamma \neq 0\,.$$

(c) Se F non è conservativo in A allora per ogni curva Γ regolare a tratti, chiusa, a valori in A, vale

$$\oint_\Gamma F \cdot d\Gamma \neq 0\,.$$

Punteggio: 6

Domanda 2. Siano $A \subset \mathbb{R}^3$ un aperto e $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^3$ di classe $C^1(A)$. Sia V un sottoinsieme chiuso e limitato di A tale che la sua frontiera $\mathcal{S}$ sia una superficie regolare e chiusa con versore normale $\vec{n}$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) Vale

$$\iiint_V \mathrm{div}\vec{F}\, dxdydz = \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{n}\, d\mathcal{S}\,.$$

(b) Vale

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{n}\, d\mathcal{S} = 0\,.$$

Punteggio: 4
