ANALISI MATEMATICA II — 31 Gennaio 2023 — Compito 1

Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.. Corso di Laurea: ♢ AMBLT ♢ CIVLT

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere Cognome e Nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 90 min.
3. Su ogni foglio protocollo scrivere Cognome, Nome, numero di matricola. Usare i fogli protocollo per la minuta dei calcoli (brutta copia) e come bella copia per l'esposizione dello svolgimento degli esercizi e per le domande di teoria. Ogni cosa va esposta e giustificata con completezza. Al termine si consegnano *tutti* i fogli protocollo.

ESERCIZI

---

1. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = y^2 \left(\frac{y}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right)$$

Punteggio: 6

---

2. L'integrale triplo

$$\iiint_T y^2 \, dxdydz$$

dove

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, 0 \le z \le 1, \, x^2 + 2x + y^2 - z \le 1\}$$

vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{\pi}{12}[3^3 - 1]$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{\pi}{12}[3^3 - 2^3]$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{\pi}{3}[3^3 - 2^3]$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{\pi}{6}[3^3 - 2^3]$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{\pi}{3}[3^3 - 1]$

Punteggio: 7

---

3. Sia $\alpha > 0$. Studiare la convergenza puntuale e totale di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^3} \log \left(1 + \frac{e^{n(x^2-1)}}{n^\alpha} \right) \qquad x \in \mathbb{R} \, .$$

Punteggio: 7

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1.

Sia I un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e siano $f_n\,, f\,, g\, :\, I \to \mathbb{R}$, per $n \in \mathbb{N}$. Si supponga che $f_n \in C^1(I)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, che la successione $\{f_n\}$ sia puntualmente convergente a f in I e che la successione $\{f_n'\}$ sia uniformemente convergente a g in I.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date.

(a) $f \in C^1(I)$

(b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$ per ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subset I$

(c) $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = f(b) - f(a)$ per ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subset I$.

Punteggio: 6

Domanda 2.

Sia $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e sia $\vec{F} = (F_1, F_2) : A \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe $C^1(A)$. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date.

(a) Se per ogni $(x,y) \in A$ vale

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 0$$

allora $\vec{F}$ è conservativo in A.

(b) Se per ogni curva chiusa Γ regolare a tratti a valori in A vale

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma = 0$$

allora $\vec{F}$ è conservativo in A.

(c) Se per ogni $(x,y) \in A$ vale $\dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 0$ e $\displaystyle\oint_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\Gamma = 2\pi\,$, dove Γ_1 è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 percorsa in senso antiorario, allora $\displaystyle\oint_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\Gamma = 4\pi\,$, dove Γ_2 è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2 percorsa in senso antiorario.

Punteggio: 6
