Analisi Matematica II 6 Settembre 2021

---

Cognome e Nome............................................ Matricola ......................

Firma........................................... Corso di Laurea: ♢ AMBLT ♢ CIVLT

---

**Istruzioni**

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere Cognome e Nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 75 min.
3. Su ogni foglio protocollo scrivere Cognome, Nome, numero di matricola. Usare i fogli protocollo per la minuta dei calcoli (brutta copia) e come bella copia per l'esposizione dello svolgimento degli esercizi e per le domande di teoria. Ogni cosa va esposta e giustificata con completezza. Al termine si consegnano *tutti* i fogli protocollo.

---

## ESERCIZI

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + \arctan(xy^2)$. Allora

   *Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : $(0, \pm 1)$ sono punti di sella, $(1, 0)$ è di massimo relativo $\boxed{\text{B}}$ : $(0, \pm 1)$ sono punti di minimo relativo, $(1, 0)$ è di sella $\boxed{\text{C}}$ : $(0, \pm 1)$ sono punti di sella, $(1, 0)$ è di minimo relativo $\boxed{\text{D}}$ : $(0, 1)$ è punto di massimo relativo, $(0, -1)$ è di minimo relativo, $(1, 0)$ è di sella $\boxed{\text{E}}$ : $(0, 1)$ è punto di minimo relativo, $(0, -1)$ è di massimo relativo, $(1, 0)$ è di minimo relativo

   **Punteggio: 7**

---

2. L'integrale di superficie

$$\iint_S \frac{x^2}{\sqrt{1 + 16x^2 + 4y^2}} \, dS$$

   dove

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x^2 + y^2, \quad z \leq 2\}$$

   vale

   *Risp.:* $\boxed{\text{A}}$ : $\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\boxed{\text{B}}$ : $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ $\boxed{\text{C}}$ : $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ $\boxed{\text{D}}$ : $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{E}}$ : $\sqrt{2}$

   **Punteggio: 6**

---

3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(n!)^\alpha \, (2n+1)(2n+2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

   (a) determinare il suo insieme I di convergenza puntuale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;

   (b) nel caso di $\alpha = 0$ stabilire se la serie converge uniformemente in I;

   (c) nel caso di $\alpha = 0$ stabilire se la serie converge totalmente in I;

(d) nel caso di $\alpha = 0$ calcolare la somma della serie.

**Punteggio: 7**

---

## DOMANDE DI TEORIA

---

**Domanda 1.**

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(0,0) = \vec{0}$.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date.

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 0$ per ogni versore $\vec{v}$ di $\mathbb{R}^2$;

(b) se $f$ è differenziabile in $(0,0)$, allora $(0,0)$ è un punto di estremo relativo per $f$.

**Punteggio: 4**

---

**Domanda 2.**

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = e^{(y^2(t) - 3y(t))} - 1 \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date.

(a) $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ esiste ed è unica la soluzione del problema di Cauchy, definita in un intorno di $t = 0$;

(b) $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ tale che $y_0 \leq 3$ l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è illimitato a destra;

(c) $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ tale che $y_0 > 3$ la soluzione è concava nel suo dominio.

**Punteggio: 6**

---