Cognome e Nome.. Matricola ....

Firma.. Corso di Laurea: ♢ AMBLT ♢ CIVLT

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere Cognome e Nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 75 min.
3. Su ogni foglio protocollo scrivere Cognome, Nome, numero di matricola. Usare i fogli protocollo per la minuta dei calcoli (brutta copia) e come bella copia per l'esposizione dello svolgimento degli esercizi e per le domande di teoria. Ogni cosa va esposta e giustificata con completezza. Al termine si consegnano *tutti* i fogli protocollo.

ESERCIZI

1. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\log(1+|x|y^2)+y\sin(|x|y)}{(|x|+|y|)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette giustificando le risposte date.
(a) f è continua in $(0,0)$ per ogni α, (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ per ogni α, (c) le derivate direzionali in $(0,0)$ esistono se e solo se $\alpha < 3$, (d) le derivate direzionali in $(0,0)$ (diverse dalle derivate parziali) esistono e sono nulle se e solo se $\alpha < 2$, (e) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 2$.

Punteggio: 7

2. Dato $R > 0$ calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T (x + y + z^2)\, dxdydz$$

dove T è la regione solida formata da due coni sovrapposti

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -R + \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq R - \sqrt{x^2+y^2}\}.$$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{\pi}{2}R^5$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{\pi}{3}R^5$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{\pi}{5}R^5$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{\pi}{8}R^5$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{\pi}{15}R^5$

Punteggio: 6

3. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log(1+y^2) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$,

(a) discutere l'esistenza ed unicità locale e globale della soluzione (*suggerimento*: $\log(1+y^2) \leq 3|y|$, $\forall y \in \mathbb{R}$);

(b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;

(c) calcolare il limite della soluzione $y(t)$ per $t \to +\infty$ (*suggerimento*: utilizzare il teorema dell'asintoto);

(d) studiare la concavità/convessità della soluzione.

Punteggio: 7

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1. Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, sia R il suo raggio di convergenza, con $0 < R < +\infty$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) La serie converge assolutamente nell'intervallo $(-R, R)$.

(b) Se la serie converge puntualmente per $x = R$, allora vi converge anche assolutamente.

(c) Se la serie converge per $x = R$, allora converge uniformemente nell'intervallo $[0, R]$.

Punteggio: 6

Domanda 2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$. Sia inoltre $\vec{x}_0 \in A$ un punto stazionario per f e $H_f(\vec{x}_0)$ la matrice hessiana di f in $\vec{x}_0$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date:

(a) Se gli autovalori di $H_f(\vec{x}_0)$ sono $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$, allora il test della matrice hessiana è inefficace.

(b) Se $\det H_f(\vec{x}_0) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0$, allora $\vec{x}_0$ è un punto di massimo o di minimo relativo.

Punteggio: 4
