
Cognome e Nome... Matricola ....

Firma.. Corso di Laurea: ♢ AMBLT ♢ CIVLT

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere Cognome e Nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 90 min.
3. Su ogni foglio protocollo scrivere Cognome, Nome, numero di matricola. Usare i fogli protocollo per la minuta dei calcoli (brutta copia) e come bella copia per l'esposizione dello svolgimento degli esercizi e per le domande di teoria. Ogni cosa va esposta e giustificata con completezza. Al termine si consegnano *tutti* i fogli protocollo.

ESERCIZI

---

1. Sia $\alpha > 0$ e si consideri il campo scalare

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\left(\cos(\sqrt{2}\,x) - e^{-x^2}\right)\sin(|y|^{3\alpha})}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^6} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette giustificando le risposte.

(a) f è continuo in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \geq \frac{2}{3}$ (b) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ per ogni $\alpha > 0$ (c) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 1$ (d) per ogni versore $v = (v_1, v_2)$ e per ogni $\alpha > 1$ si ha $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 1$ (e) per $\alpha \leq 1$ le uniche derivate direzionali esistenti sono quelle parziali.

Punteggio: 7

---

2. Dato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y) = (x^3 + y^3)\vec{i} + (x^3 - y^3)\vec{j}$$

calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$, dove Γ è la frontiera dell'insieme piano

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + y^2 \leq 4, \, x + y \geq 0, x - y \geq 0\right\}$$

percorsa in senso antiorario.

$\boxed{A}$: 12 $\boxed{B}$: 6 $\boxed{C}$: -16 $\boxed{D}$: 8 $\boxed{E}$: -32 $\boxed{F}$: 4

Punteggio: 7

---

3. Sia $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la successione di funzioni data da

$$f_n(x) = e^{-(x-1-n)^2}, \qquad x \geq 0.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente in $[0,+\infty)$ (b) f_n non converge uniformemente in $[0,+\infty)$ (c) f_n converge uniformemente in $[0,M]$ per ogni $M>0$ (d) la funzione limite $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ammette un punto di salto in $x=1$ (e)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

tutte e sole quelle corrette sono

$\boxed{A}$: (a), (b), (c) $\boxed{B}$: (a), (b), (c), (d) $\boxed{C}$: (a), (c), (d) $\boxed{D}$: (b), (c), (d) $\boxed{E}$: (a), (c), (e) $\boxed{F}$: (b), (c)

Punteggio: 6

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1. Sia data la serie trigonometrica

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}\,, \qquad x\in\mathbb{R}\,.$$

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date.

(a) La serie converge totalmente in $\mathbb{R}$

(b) La sua somma è una funzione continua e 2π-periodica

(c) La serie delle derivate termine a termine converge puntualmente in $\mathbb{R}$.

Punteggio: 6

Domanda 2. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \big(y^2(t)-1\big) + \arctan\big(y^2(t)-1\big) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date.

(a) $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ esiste ed è unica la soluzione del problema di Cauchy, definita in un intorno di $t=0$

(b) $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ tale che $y_0 \le 1$ l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è illimitato a destra

(c) $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ tale che $y_0 > 1$ la soluzione è concava nel suo dominio.

Punteggio: 6
