

1. Sia  $\alpha \in \mathbf{R}$ . La serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin(\frac{2\pi}{n}))^2}{(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n})^\alpha}$$

converge per

Risp.: **A** :  $\alpha \leq 2$  **B** :  $\alpha > 2$  **C** : per nessun  $\alpha$  **D** : solo per  $\alpha \leq \frac{1}{2}$  **E** :  $\alpha < 2$  **F** : per ogni  $\alpha$

2. Determinare  $x \in \mathbf{R}$ ,  $-1 < x \leq 1$  tale che  $\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^{n-2}}{n-2} = 2^2$ .

Risp.: **A** :  $x = \frac{e-1}{2}$  **B** :  $x = \frac{e}{2}$  **C** :  $x = 2$  **D** :  $x = \frac{e-1}{3}$  **E** :  $x = 3$  **F** :  $x = \frac{1}{2}$

3. Sia  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2n} \log(1+n^2 x^2) - \frac{1}{2n+2} \log(1+(n+1)^2 x^2) \right]$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . Delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge puntualmente ma non uniformemente in  $\mathbf{R}$  (b) la serie converge uniformemente in  $\mathbf{R}$  (c) la serie delle derivate converge uniformemente in  $\mathbf{R}$  (d) la serie delle derivate converge puntualmente in  $\mathbf{R}$  (e) la serie converge solo in  $[-3, 2]$

Le uniche corrette sono

Risp.: **A** : b d **B** : e **C** : a d **D** : b c d **E** : b c **F** : a c

4. Sia  $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$  la successione di funzioni definita da  $f_n(x) = 3n^2 x(1-x^2)^n$ ,  $x \in [0, 1]$ . Delle seguenti affermazioni

(a)  $\{f_n\}$  converge puntualmente in  $[0, 1]$  (b)  $\{f_n\}$  converge puntualmente solo in  $[0, 1[$  (c)  $\{f_n\}$  converge uniformemente in  $[0, 1]$  (d)  $\{f_n\}$  converge uniformemente in  $]0, 1[$  (e)  $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$  dove  $f$  è il limite puntuale di  $\{f_n\}$ .

le uniche corrette sono

Risp.: **A** : b d **B** : b e **C** : a c d **D** : a **E** : a c e **F** : a d e

5. Sia  $f$  la funzione  $2\pi$ -periodica definita da  $f(x) = 2|\sin x|$ ,  $|x| \leq \pi$ . Allora i coefficienti di Fourier di  $f$  sono

Risp.: **A** :  $a_0 = \frac{8}{\pi}$ ,  $a_k = -\frac{8}{\pi} \frac{1}{4k^2-1} \forall k \geq 1$ ,  $b_k = 0 \forall k \geq 1$  **B** :  $a_0 = \frac{8}{\pi}$ ,  $a_k = b_k = 0 \forall k \geq 1$  **C** :  $a_0 = \frac{2}{\pi}$ ,  $a_{2k} = -\frac{8}{\pi} \frac{1}{4k^2-1} \forall k \geq 1$ ,  $a_{2k+1} = 0 \forall k \geq 0$ ,  $b_k = 0 \forall k \geq 1$  **D** :  $a_0 = \pi$ ,  $a_k = b_k = -\frac{8}{\pi} \frac{1}{4k^2-1} \forall k \geq 1$  **E** :  $a_0 = \frac{8}{\pi}$ ,  $a_{2k} = -\frac{8}{\pi} \forall k \geq 1$ ,  $a_{2k+1} = 0 \forall k \geq 0$ ,  $b_k = \frac{4}{\pi} \forall k \geq 1$  **F** :  $a_0 = \frac{8}{\pi}$ ,  $a_{2k} = -\frac{8}{\pi} \frac{1}{4k^2-1} \forall k \geq 1$ ,  $a_{2k+1} = 0 \forall k \geq 0$ ,  $b_k = 0 \forall k \geq 1$

6. Sia  $\alpha \in \mathbf{R}$ . L'integrale improprio  $\int_0^{+\infty} \frac{\cosh(x^\alpha) - 1}{\sinh(2x)} dx$  converge se e solo se

Risp.: **A** :  $0 < \alpha \leq 3$  **B** :  $0 \leq \alpha < 1/3$  **C** :  $2 \leq \alpha \leq 3$  **D** :  $0 < \alpha < 1$  **E** :  $\alpha \leq 1$  **F** :  $\alpha \geq 0$

7. La funzione  $u(x)$  tale che  $\mathcal{L}[u(x)](s) = \frac{2s}{(s-1)(s+1)^2}$  è

Risp.: **A** :  $u(x) = xe^{-x}H(x)$  **B** :  $u(x) = (\sinh x + xe^{-x})H(x)$  **C** :  $u(x) = (\sinh x + e^x)H(x)$  **D** :  $u(x) = e^{-x}H(x)$  **E** :  $u(x) = e^{-2x} \sin x H(x)$  **F** :  $u(x) = (\sinh x + xe^x)H(x)$

8. Sia  $y(t)$  la soluzione del seguente problema di Cauchy  $\begin{cases} y'(t) = y \arctan(2^2 - y^2) \\ y(0) = \alpha \in \mathbf{R} \end{cases}$ . Allora  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$  vale

Risp.: **A** : 2 per ogni  $\alpha$  **B** : 0 se  $\alpha \geq 0$ , -2 se  $\alpha < 0$  **C** : 2 se  $\alpha > 0$ , 0 se  $\alpha = 0$ , -1 se  $\alpha < 0$  **D** : 2 se  $\alpha > 0$ , 0 se  $\alpha = 0$ , -2 se  $\alpha < 0$  **E** :  $-\infty$  per ogni  $\alpha$  **F** : -2 se  $\alpha < 0$ , 0 se  $\alpha = 0$ ,  $+\infty$  se  $\alpha > 0$

- Istruzioni.
1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, riportare cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
  2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande riportate nel foglio allegato; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
  3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = -1; risposta non data = 0.
  4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
  5. CONSEGNARE solo questo foglio.
  6. TEMPO a disposizione: 90 min.

*Risposte relative al foglio allegato.*

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F