

1. Sia $\alpha \in \mathbf{R}$. La serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log\left(\frac{n}{2}\right) \sin\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$ converge assolutamente per

Risp.: **A**: $\alpha \leq \frac{1}{2}$ **B**: $\alpha > \frac{1}{2}$ **C**: $\alpha > \frac{\pi}{2}$ **D**: $\alpha \geq \frac{1}{2}$ **E**: $0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$ **F**: $0 < \alpha < 1$

2. La somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3(3x)^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)}$ vale

Risp.: **A**: $3^2 \int_0^x \cos(3t^2) dt$ **B**: $\int_0^x \cos(t^2) dt - 3x$ **C**: $2x$ **D**: x^2 **E**: $\cos(x^2)$ **F**: $3^2 \int_0^x \cos(3t^2) dt - 3^2 x$

3. Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} (3x)^4 \exp(-nx)$, $x \in \mathbf{R}$ Delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge totalmente in $[0, +\infty[$ (b) la serie converge uniformemente ma non totalmente in $[0, +\infty[$
 (c) la serie converge solo puntualmente in $[0, \frac{1}{3}[$

(d) vale $\int_2^3 \sum_{n=0}^{+\infty} (3x)^4 \exp(-nx) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_2^3 (3x)^4 \exp(-nx) dx$ (e) la serie converge su \mathbf{R} . Le uniche corrette sono

Risp.: **A**: b d **B**: e **C**: a c d **D**: a d **E**: b c **F**: a e

4. Sia $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ la successione di funzioni definita da $f_n(x) = x - \frac{3x^{n+1}}{n+1}$, $x \in [0, 1]$. Siano $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ il limite puntuale di f_n e di f'_n rispettivamente. Delle seguenti affermazioni

(a) $\{f_n\}$ converge a f uniformemente in $[0, 1]$ (b) $\{f_n\}$ converge a f solo puntualmente in $[0, 1]$ (c) $\{f'_n\}$ converge a g uniformemente in $[0, 1]$ (d) $\{f'_n\}$ converge a g uniformemente in $[0, 1[$ (e) $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$

le uniche corrette sono

Risp.: **A**: b d **B**: b e **C**: a e **D**: a c d **E**: b c d **F**: a d e

5. Sia f la funzione 2π -periodica definita da $f(x) = e^{-|x|} |\sin x|$, $|x| \leq \pi$. Delle seguenti affermazioni

(a) la sua serie di Fourier converge uniformemente in \mathbf{R} (b) la sua serie di Fourier converge in media quadratica in $[-\pi, \pi]$ (c) la sua serie di Fourier è derivabile termine a termine in $] -\pi, \pi[$ e non in $[-\pi, \pi]$ (d) la sua serie di Fourier è derivabile termine a termine in $[-\pi, \pi]$ (e) la serie delle derivate converge a f' in $[-\pi, \pi]$ (f) il coefficiente $a_0 = 0$. Le uniche corrette sono

Risp.: **A**: b d **B**: a b c **C**: a d e **D**: b c f **E**: a b **F**: a d f

6. Calcolare la trasformata di Fourier per $\xi \neq 0$ $\hat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{-i\xi x} dx$ della funzione

$u(x) = (|x| - 1)^2 \chi_{[-1,1]}(x)$ dove $\chi_{[-1,1]}(x) = 1$ se $x \in [-1, 1]$ e $\chi_{[-1,1]}(x) = 0$ se $x \notin [-1, 1]$.

Risp.: **A**: $\hat{u}(\xi) = (1 - \frac{\sin \xi}{\xi})$ **B**: $\hat{u}(\xi) = \frac{4}{\xi^2}$ **C**: $\hat{u}(\xi) = \frac{4}{\xi^2} (1 - \frac{\sin \xi}{\xi})$ **D**: $\hat{u}(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi}$
E: $\hat{u}(\xi) = \frac{4}{\xi^2} - \frac{\sin \xi}{\xi}$ **F**: $\hat{u}(\xi) = \frac{4}{\xi^2} (1 - \frac{\cos \xi}{\xi})$

7. La funzione $u(x)$ tale che $\mathcal{L}[xu(x)](s) = \frac{2(s+1)}{(s^2+2s+2)^2}$ è

Risp.: **A**: $u(x) = e^{-x} H(x)$ **B**: $u(x) = \sin x H(x)$ **C**: $u(x) = e^{-x} \cos x H(x)$
D: $u(x) = e^{-2x} \sin x H(x)$ **E**: $u(x) = (\sin x + x^2) H(x)$ **F**: $u(x) = e^{-x} \sin x H(x)$

8. Sia $y(t)$ la soluzione del seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y'(t) = t \frac{\arctan(1-y^2)}{1+y^2} \\ y(0) = \alpha \in \mathbf{R} \end{cases}$. Allora $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ vale

Risp.: **A**: -1 per ogni α **B**: 1 se $\alpha > -1$, -1 se $\alpha = -1$, $-\infty$ se $\alpha < -1$ **C**: 0 se $\alpha > -1$, -2 se $\alpha = -1$, $-\infty$ se $\alpha < -1$ **D**: 1 se $\alpha > 0$, -1 se $\alpha = 0$, $-\infty$ se $\alpha < 0$ **E**: $-\infty$ per ogni α **F**: 1 se $\alpha < -1$, 0 se $\alpha = -1$, $+\infty$ se $\alpha > 1$

- Istruzioni.
1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, riportare cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
 2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande riportate nel foglio allegato; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
 3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = -1; risposta non data = 0.
 4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
 5. CONSEGNARE solo questo foglio.
 6. TEMPO a disposizione: 90 min.

Risposte relative al foglio allegato.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F