1. Sia $\alpha \in \mathbf{R}^+$. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^\alpha + \left(\frac{\alpha}{6}\right)^n}{\log\cosh n^2}$ converge se e solo se

Risp.: $\boxed{A}$: $\alpha > 6$ $\boxed{B}$: $0 < \alpha < 1$ $\boxed{C}$: $0 < \alpha < 1/2$ $\boxed{D}$: $0 < \alpha \le 1$ $\boxed{E}$: $0 < \alpha < 6$ $\boxed{F}$: $0 < \alpha \le 6$

---

2. La somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n\ x^{n+2}}{(n+2)n!}\,,\quad x \in \mathbf{R}$ vale

Risp.: $\boxed{A}$: $\frac{1}{2} + \frac{e^{2x}}{2}(2x^2 - 1)$ $\boxed{B}$: $\frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{4}(2x - e^{2x})$ $\boxed{C}$: $\frac{e^{2x}}{2}(2x+1)$ $\boxed{D}$: $\frac{\sin 2x}{4}(2x-1)$ $\boxed{E}$: $\frac{1}{2} + \frac{\sin 2x}{2}(e^{2x} - 1)$ $\boxed{F}$: $\frac{1}{4} + \frac{e^{2x}}{4}(2x-1)$

---

3. Sia $\{f_n(x)\}_{n\ge 0}$ la successione di funzioni definita da $f_n(x) = \dfrac{1}{4^n}\sin(3^n x)\,,\quad x \in \mathbf{R}$.
Delle seguenti affermazioni

(a) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in $\mathbf{R}$ (b) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge puntualmente ma non totalmente in $\mathbf{R}$ (c) $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$ converge totalmente in $\mathbf{R}$ (d) vale $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)'$
le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{A}$: a c $\boxed{B}$: b d $\boxed{C}$: a c d $\boxed{D}$: b c d $\boxed{E}$: a d $\boxed{F}$: a

---

4. Sia $\{f_n(x)\}_{n\ge 1}$ la successione di funzioni definita da $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\log(nx + \sqrt{n^2x^2+1})\,,\quad x \in [0,1]$. Delle seguenti affermazioni

(a) $\{f_n\}$ converge a 0 puntualmente in $[0,1]$ (b) $\{f_n\}$ converge a 0 uniformemente in $[0,1]$ (c) esiste $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ tale che $\{f_n'\}$ converge a g puntualmente in $[0,1]$ (d) esiste $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ tale che $\{f_n'\}$ converge a g uniformemente in $[0,1]$ (e) esiste $g :]0,1] \to \mathbf{R}$ tale che $\{f_n'\}$ converge a g uniformemente in $]0,1]$ le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{A}$: a b c $\boxed{B}$: a c d $\boxed{C}$: a b c e $\boxed{D}$: a b e $\boxed{E}$: a c e $\boxed{F}$: c d e

---

5. Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \sin(2x) & \text{se } |2x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ estesa per periodicità in $\mathbf{R}$. I coefficienti della sua serie di Fourier sono

Risp.: $\boxed{A}$: $a_n = 0\ \forall n \ge 0,\ b_2 = \frac{1}{4},\ b_n = \frac{2n}{(4-n^2)\pi}\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\ \forall n \ne 2$ $\boxed{B}$: $a_n = 0\ \forall n \ge 0,\ b_2 = \frac{1}{2},\ b_n = \frac{4}{(4-n^2)\pi}\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\ \forall n \ne 2$ $\boxed{C}$: $a_n = \frac{2n}{(4+n^2)}\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\ \forall n \ge 0,\ b_n = \frac{2n}{(4+n^2)\pi}\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\ \forall n \ge 0$ $\boxed{D}$: $a_n = 0\ \forall n \ge 0,\ b_2 = \frac{1}{4},\ b_n = \frac{2n}{(2-n)\pi}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\ \forall n \ne 2$ $\boxed{E}$: $a_n = 0\ \forall n \ge 0,\ b_2 = \frac{\pi}{4},\ b_n = \frac{1}{(4-n^3)\pi}\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\ \forall n \ne 2$ $\boxed{F}$: $a_n = \frac{2n}{(4+n^2)}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\ \forall n \ge 0,\ b_n = \frac{n}{(4+n^2)\pi}\cos\left(\frac{2\pi n}{4}\right)\ \forall n \ge 0$

---

6. Sia $\alpha \in \mathbf{R}$. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cosh(2x) - 1}{x^\alpha e^{2x}\log(1+x)}\,dx$ converge se e solo se

Risp.: $\boxed{A}$: $0 < \alpha \le 1/2$ $\boxed{B}$: $1 \le \alpha < 2$ $\boxed{C}$: $0 \le \alpha \le 2/5$ $\boxed{D}$: $1 < \alpha < 2$ $\boxed{E}$: $\alpha < 2$ $\boxed{F}$: $-1 < \alpha < 1$

---

7. La trasformata di Laplace della soluzione del seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + y' = \frac{5}{2}x^2\cosh x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ è

Risp.: $\boxed{A}$: $\mathcal{L}[y](p) = \frac{5p}{(p-1)^3}$ $\boxed{B}$: $\mathcal{L}[y](p) = \frac{5(p^2+1)}{(p^2-1)(p+1)^2}$ $\boxed{C}$: $\mathcal{L}[y](p) = \frac{1}{(p+1)(p-1)^3}$ $\boxed{D}$: $\mathcal{L}[y](p) = \frac{5p}{(p+1)^2(p-1)^3}$ $\boxed{E}$: $\mathcal{L}[y](p) = \frac{5(p^2+3)}{(p+1)(p^2-1)^3}$ $\boxed{F}$: $\mathcal{L}[y](p) = \frac{3(p^2+3)}{(p^2-1)^4(p+1)^2}$

---

8. Sia $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $u(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } |x| \le \pi \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$ Sapendo che $\mathcal{F}[u](\xi) = -2i\dfrac{\sin(2\pi^2\xi)}{1 - 4\pi^2\xi^2}$ (dove $\mathcal{F}[u(x)](\xi)$ indica la trasformata di Fourier $\mathcal{F}[u(x)](\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{-2\pi i\xi x}\,dx$ della funzione $u(x)\,,\ x \in \mathbf{R}$), calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{(1-t^2)^2}\,dt\,.$

Risp.: $\boxed{A}$: $2\pi^2$ $\boxed{B}$: $\pi^2/2$ $\boxed{C}$: π $\boxed{D}$: π^2 $\boxed{E}$: $\pi/4$ $\boxed{F}$: 2π

....

Cognome e nome Firma

ANALISI MATEMATICA C 28 giugno 2004 Compito 2

Istruzioni. 1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, riportare cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande riportate nel foglio allegato; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE solo questo foglio.
6. TEMPO a disposizione: 90 min.

Risposte relative al foglio allegato.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F