

1. Sia $\alpha \in \mathbf{R}$. La serie numerica $\sum_{n=2}^{+\infty} (n^7 + \log(7n)) \left(n^{(-1/3)} - \sin \left(n^{(-1/3)} \right) \right)^\alpha$ converge se e solo se

Risp.: A : $\alpha > 7$ B : $\alpha > 8$ C : $\alpha \geq 8$ D : $\alpha \geq 7$ E : $\alpha \leq 8$ F : $\alpha \leq 7$

2. La somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)(2n+1)!}$, $x \in \mathbf{R}$ vale

Risp.: A : $x \cosh x - \sinh x$ B : $x \cosh^2 x - \sinh x$ C : $x^2 e^x + \sinh x$ D : $x \cosh x - \sin x - x$ E : $x \cosh x - \arctan x$ F : $1 - x^2 - \cosh x - \sinh^2 x$

3. Sia data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\arctan(nx) - \arctan((n-1)x) \right)$, $x \in \mathbf{R}$. Delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge puntualmente in \mathbf{R} (b) la serie converge puntualmente solo in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ (c) la serie converge uniformemente in $[0, +\infty[$ (d) la serie converge uniformemente in $]0, +\infty[$ (e) la serie converge uniformemente in $[\alpha, +\infty[$ per ogni $\alpha > 0$

le uniche corrette sono

Risp.: A : a c B : b d e C : b e D : a d e E : a e F : c d

4. Sia $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ la successione di funzioni definita da $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{n}}{2} & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{n}. \end{cases}$

Delle seguenti affermazioni

(a) esiste $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ tale che $\{f_n\}$ converge a g puntualmente in $[0, 1]$ (b) esiste $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ tale che $\{f_n\}$ converge a g uniformemente in $[0, 1]$ (c) $\{f_n\}$ converge a $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ puntualmente in $]0, 1]$ (d) $\{f_n\}$ converge a $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ uniformemente in $]0, 1]$ (e) $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$

le uniche corrette sono

Risp.: A : c d e B : a c e C : c e D : b d E : a b c F : a b e

5. Sia $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{altrimenti} \end{cases}$ estesa per periodicit  in \mathbf{R} . Allora il coefficiente di Fourier a_4 vale

Risp.: A : 0 B : $\frac{1}{8\pi}$ C : $-\frac{1}{\pi}$ D : $\frac{1}{\pi}$ E : $-\frac{1}{2\pi}$ F : $-\pi$

6. Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{-2\pi i \xi x} dx$ della funzione $u(x) = |x|e^{-|x|}$, $x \in \mathbf{R}$.

Risp.: A : $\hat{u}(\xi) = 4 \frac{1 - 2\pi^2 \xi^2}{(1 + 2\pi^2 \xi^2)^2}$ B : $\hat{u}(\xi) = 2 \frac{1 - \pi^2 \xi^2}{1 + 4\pi^2 \xi^2}$ C : $\hat{u}(\xi) = \frac{1 - 4\pi^2 \xi^2}{(1 + 4\pi^2 \xi^2)^4}$ D : $\hat{u}(\xi) = 2 \frac{1 - 4\pi^2 \xi^2}{(1 + 4\pi^2 \xi^2)^2}$
 E : $\hat{u}(\xi) = \pi \frac{1 - 4\pi^2 \xi^2}{(1 - \pi^2 \xi^2)^2}$ F : $\hat{u}(\xi) = \pi^2 \frac{1 - 4\pi^2 \xi^2}{4 + \pi^2 \xi^2}$

7. L'antitrasformata di Laplace di $\mathcal{L}[u(x)](p) = p \frac{p^2 - 2p - 1}{(p^2 + 1)(p - 1)^2}$  

Risp.: A : $u(x) = (\sin x + \cos(2x) + e^x)H(x)$ B : $u(x) = (x \sin x + \cos x + e^{-x})H(x)$ C : $u(x) = (\sin^2 x - e^x + x)H(x)$ D : $u(x) = (\cosh x + \sin x - xe^{-x})H(x)$ E : $u(x) = (\sinh x + x \cosh x)H(x)$ F : $u(x) = (\sin x + \cos x - xe^x)H(x)$

8. Sia $\alpha \in \mathbf{R}^+$. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = (y - 1) \tan \left(\frac{y}{1 + y^2} \right) \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$

L'intervallo massimale di esistenza della soluzione  

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ per $\alpha > 1$ e \mathbf{R} per $0 < \alpha \leq 1$ $\boxed{\text{B}}$: \mathbf{R} per ogni $\alpha \in \mathbf{R}^+$ $\boxed{\text{C}}$: $] -\infty, \frac{\pi}{2}[$ per ogni $\alpha \in \mathbf{R}^+$
 $\boxed{\text{D}}$: $] -\infty, \frac{\pi}{2}[$ per $\alpha > 1$; $] -\frac{\pi}{4}, +\infty[$ per $0 < \alpha < 1$; \mathbf{R} per $\alpha = 1$ $\boxed{\text{E}}$: \mathbf{R} per $\alpha \geq 1$; $] -\infty, \frac{\pi}{2}[$ per $0 < \alpha < 1$
 $\boxed{\text{F}}$: $[0, 1]$ per $\alpha > 1$; $] -\infty, 1[$ per $0 < \alpha \leq 1$

.....
Cognome e nome

.....
Firma

ANALISI MATEMATICA C

29 marzo 2004

Compito 1

- Istruzioni.
1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, riportare cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
 2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande riportate nel foglio allegato; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
 3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = -1; risposta non data = 0.
 4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
 5. CONSEGNARE solo questo foglio.
 6. TEMPO a disposizione: 90 min.
-
-

Risposte relative al foglio allegato.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F