

1. Sia $\alpha \in \mathbf{R}$. La serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\alpha - 1)^n}{n2^n}$

Risp.: **A**: non converge per $-1 < \alpha < 3$ **B**: converge solo semplicemente per $-1 < \alpha < 3$ **C**: converge semplicemente per $\alpha < -1, \alpha \geq 3$ **D**: converge assolutamente per $\alpha \geq -1$ **E**: converge semplicemente per $\alpha \geq -1$ **F**: converge assolutamente per $-1 < \alpha < 3$, converge semplicemente per $\alpha = -1$, non converge per $\alpha < -1, \alpha \geq 3$

2. Per ogni $x \geq 0$ la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+3} \frac{(3x)^{n+1}}{(2n+1)!}$ vale

Risp.: **A**: $-\sqrt{3x} \sin \sqrt{3x} + 3x$ **B**: $\sin \sqrt{3x} + 3x$ **C**: $-\sqrt{3x} \sin x$ **D**: $\sin 2x + 3x^2$ **E**: $\cos 3x - 3x$
F: $-\cos 3x - 3x$

3. La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{3n} \frac{n!}{n^n}$, $x \neq 0$

Risp.: **A**: converge solo puntualmente per $|x| > (1/e)^{1/3}$ **B**: converge assolutamente per $|x| \leq (1/e)^{1/3}$
C: converge assolutamente per $|x| > (1/e)^{1/3}$ **D**: converge solo in $x = (1/e)^{1/3}$ **E**: non converge assolutamente per $|x| > (1/e)^{1/3}$ **F**: non converge puntualmente per $|x| > (1/e)^{1/3}$

4. Sia $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ la successione di funzioni definita da $f_n(x) = 3 \arctan(x^n)$, $x \in [0, +\infty[$. Siano $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ il limite puntuale di f_n e $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ il limite puntuale di f'_n rispettivamente.

Delle seguenti affermazioni

(a) $\{f_n\}$ converge a f solo puntualmente in $[0, +\infty[$ (b) $\{f_n\}$ converge a f uniformemente in $[3, +\infty[$

(c) $\int_3^4 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_3^4 f_n(x) dx$ (d) $g = 0$ su $[0, +\infty[$ (e) f'_n converge uniformemente a g su $[0, +\infty[$. Le uniche corrette sono

Risp.: **A**: b d **B**: a b e **C**: a b c **D**: a c d **E**: b c **F**: a e

5. Sia f la funzione 2π -periodica definita da $f(x) = \cos(2x)$ per $|2x| < \frac{\pi}{2}$, $f(x) = 0$ per $\frac{\pi}{4} \leq |x| \leq \pi$. I coefficienti $\gamma_0, \gamma_4, \gamma_{-4}$ della sua serie di Fourier complessa sono

Risp.: **A**: $\gamma_0 = \frac{1}{2\pi}, \gamma_4 = \gamma_{-4} = \frac{1}{2\pi}$ **B**: $\gamma_0 = \pi, \gamma_4 = 2\pi, \gamma_{-4} = \frac{1}{2\pi}$ **C**: $\gamma_0 = \gamma_4 = \gamma_{-4} = 0$ **D**: $\gamma_0 = \frac{1}{2\pi}, \gamma_4 = \gamma_{-4} = \frac{1}{6\pi}$ **E**: $\gamma_0 = \frac{1}{2\pi}, \gamma_4 = \gamma_{-4} = 3\pi$ **F**: $\gamma_0 = \frac{\pi}{2}, \gamma_4 = \gamma_{-4} = \frac{2}{\pi}$

6. Sia $\alpha \in \mathbf{R}$. L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^4) \sqrt{1+x}}{x^\alpha \log(1+x^2)} dx$ converge se e solo se

Risp.: **A**: $0 < \alpha \leq 3$ **B**: $\frac{3}{2} < \alpha < 3$ **C**: $0 \leq \alpha < 1/3$ **D**: $2 \leq \alpha \leq 3$ **E**: $\alpha < 1/2$ **F**: $\alpha \geq \frac{3}{2}$

7. La trasformata di Laplace della soluzione del seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + y = 3x \cosh x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ è

Risp.: **A**: $\mathcal{L}[y](p) = \frac{4}{(p-1)^2}$ **B**: $\mathcal{L}[y](p) = \frac{4}{(p^2-1)(p+1)^2}$ **C**: $\mathcal{L}[y](p) = \frac{3}{(p^2-1)^2}$ **D**: $\mathcal{L}[y](p) = \frac{1}{(p+1)(p-1)^3}$
E: $\mathcal{L}[y](p) = \frac{4}{(p+1)^2(p-1)^2}$ **F**: $\mathcal{L}[y](p) = \frac{2p}{(p^2-1)^4}$

8. La trasformata di Fourier $\hat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{-i\xi x} dx$ per $\xi \neq 0$ della funzione $u(x) = (1-x^2)^+$, $x \in \mathbf{R}$ è

Risp.: **A**: $\hat{u}(\xi) = \left(\frac{\sin \xi}{\xi} - \cos \xi\right)$ **B**: $\hat{u}(\xi) = \frac{4}{\xi^2}$ **C**: $\hat{u}(\xi) = \frac{4}{\xi^2} \left(\frac{\sin \xi}{\xi} - \cos \xi\right)$ **D**: $\hat{u}(\xi) = \sin \xi$ **E**: $\hat{u}(\xi) = \cos \xi + \xi$ **F**: $\hat{u}(\xi) = \frac{2}{\xi} \left(\frac{\sin \xi}{\xi} - \cos \xi\right)$

- Istruzioni.
1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, riportare cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
 2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande riportate nel foglio allegato; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
 3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = -1; risposta non data = 0.
 4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
 5. CONSEGNARE solo questo foglio.
 6. TEMPO a disposizione: 90 min.

Risposte relative al foglio allegato.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F