Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. Discutere al variare di $\alpha \geq 0$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n[e^{\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n}]}{\alpha^n + n + 1}$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge se $\alpha > 1$, diverge se $0 \leq \alpha \leq 1$ $\boxed{\text{B}}$: converge per ogni $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{C}}$: diverge per ogni $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{D}}$: converge se $\alpha \geq 1$, diverge se $0 \leq \alpha < 1$ $\boxed{\text{E}}$: diverge se $\alpha \geq 1$, converge se $0 \leq \alpha < 1$ $\boxed{\text{F}}$: diverge se $\alpha > 1$, converge se $0 \leq \alpha \leq 1$

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1 \right) [\sin^2(nx^2) + 7]$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{B}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$ $\boxed{\text{C}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \leq 0$ $\boxed{\text{D}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{E}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha < 0$ $\boxed{\text{F}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$

3. Sia $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 2 - \frac{1}{n^2} \\ 2n^4 \left(x - \left(2 - \frac{1}{n^2}\right)\right)^2 & \text{per } 2 - \frac{1}{n^2} < x \leq 2 \\ 2 & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni:

(a) $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente su $[0,2]$ (c) $\{\int_0^2 f_n(x)\,dx\}$ non è limitata (d) $\{f_n'\}$ converge uniformemente su $[0,2[$ (e) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione discontinua (f) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione integrabile su $[0,10]$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c) $\boxed{\text{F}}$: (b), (d), (f)

---

4. Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)}$. Delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge puntualmente e assolutamente in $\mathbb{R}$ (b) la serie converge puntualmente in $[-1,1]$ (c) la somma della serie è una funzione pari (d) la somma della serie è una funzione dispari (e) la serie non converge totalmente in $[-1,1]$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d) $\boxed{\text{E}}$: (a), (b), (c) $\boxed{\text{F}}$: (a), (b), (d)

---

5. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni 2π-periodiche tali che

$$f(x) = \begin{cases} (x+\pi)^2 & \text{per } -\pi \le x \le 0 \\ (x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \le \pi \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2\alpha(x+\pi) & \text{per } -\pi \le x \le 0 \\ \beta(x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora se s_n è la ridotta parziale n-esima della serie di Fourier di $f+g$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\forall \alpha, \beta$ s_n non converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: $\exists \alpha$ tale che $\forall \beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: $\forall \alpha, \beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: $\exists \beta$ tale che $\forall \alpha$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: $\forall \alpha$ esiste uno ed un solo β tale che s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: $\exists \alpha$ tale che per nessun β s_n converge in media quadratica su $[-\pi, \pi]$

---

6. Sia $\alpha > 0$. L'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{|1-t^2|^{2\alpha}}\,dt$ converge se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{1}{4} < \alpha \le \frac{3}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{1}{4} \le \alpha \le \frac{3}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{1}{4} \le \alpha < \frac{3}{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha > \frac{1}{4}$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha \ge \frac{1}{4}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{3}{2}$

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan\left(\frac{y^2-1}{y^2+1}\right) \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per $\alpha > 2$ y è strettamente monotona (b) per $\alpha > 1$ y non ammette punti di estremo relativo (c) per $-1 < \alpha < 1$ y non ha punti di flesso (d) per $\alpha \le -1$ y è decrescente (e) per $\alpha \le -1$ y è limitata (f) $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -1$ per $\alpha < 0$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (c), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (b), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (b), (c), (f)

---

8. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + y'' - 2y' = 10\sin t \quad t > 0 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = -3 \end{cases}$$

è

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $y(t) = 2+3\cos t-\sin t$ $\boxed{\text{B}}$: $y(t) = 2+\cos t-3\sin t$ $\boxed{\text{C}}$: $y(t) = 2-\cos t-3\sin t+2e^t$ $\boxed{\text{D}}$: $y(t) = 2-\cos t+3\sin t-e^{-2t}$ $\boxed{\text{E}}$: $y(t) = 2-3\cos t-\sin t$ $\boxed{\text{F}}$: $y(t) = 2-3\cos t+\sin t$

---

1. Discutere al variare di $\alpha \geq 0$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n[e^{\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n}]}{\alpha^n + n + 1}$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge se $\alpha > 1$, diverge se $0 \leq \alpha \leq 1$ $\boxed{\text{B}}$: converge per ogni $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{C}}$: diverge per ogni $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{D}}$: converge se $\alpha \geq 1$, diverge se $0 \leq \alpha < 1$ $\boxed{\text{E}}$: diverge se $\alpha \geq 1$, converge se $0 \leq \alpha < 1$ $\boxed{\text{F}}$: diverge se $\alpha > 1$, converge se $0 \leq \alpha \leq 1$

---

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1 \right) [\sin^2(nx^2) + 7]$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{B}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$ $\boxed{\text{C}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \leq 0$ $\boxed{\text{D}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{E}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha < 0$ $\boxed{\text{F}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$

---

3. Sia $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 2 - \frac{1}{n^2} \\ 2n^4 \left(x - \left(2 - \frac{1}{n^2}\right)\right)^2 & \text{per } 2 - \frac{1}{n^2} < x \leq 2 \\ 2 & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

   Delle seguenti affermazioni:

   (a) $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente su $[0, 2]$ (c) $\{\int_0^2 f_n(x)\, dx\}$ non è limitata (d) $\{f_n'\}$ converge uniformemente su $[0, 2[$ (e) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione discontinua (f) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione integrabile su $[0, 10]$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c) $\boxed{\text{F}}$: (b), (d), (f)

---

4. Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)}$. Delle seguenti affermazioni

   (a) la serie converge puntualmente e assolutamente in $\mathbb{R}$ (b) la serie converge puntualmente in $[-1, 1]$ (c) la somma della serie è una funzione pari (d) la somma della serie è una funzione dispari (e) la serie non converge totalmente in $[-1, 1]$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d) $\boxed{\text{E}}$: (a), (b), (c) $\boxed{\text{F}}$: (a), (b), (d)

---

5. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni 2π-periodiche tali che

$$f(x) = \begin{cases} (x+\pi)^2 & \text{per } -\pi \le x \le 0 \\ (x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \le \pi \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2\alpha(x+\pi) & \text{per } -\pi \le x \le 0 \\ \beta(x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora se s_n è la ridotta parziale n-esima della serie di Fourier di $f+g$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\forall\alpha,\beta$ s_n non converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: $\exists\alpha$ tale che $\forall\beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: $\forall\alpha,\beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: $\exists\beta$ tale che $\forall\alpha$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: $\forall\alpha$ esiste uno ed un solo β tale che s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: $\exists\alpha$ tale che per nessun β s_n converge in media quadratica su $[-\pi,\pi]$

---

6. Sia $\alpha > 0$. L'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{|1-t^2|^{2\alpha}}\, dt$ converge se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{1}{4} < \alpha \le \frac{3}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{1}{4} \le \alpha \le \frac{3}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{1}{4} \le \alpha < \frac{3}{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha > \frac{1}{4}$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha \ge \frac{1}{4}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{3}{2}$

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan\left(\frac{y^2-1}{y^2+1}\right) \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per $\alpha > 2$ y è strettamente monotona (b) per $\alpha > 1$ y non ammette punti di estremo relativo (c) per $-1 < \alpha < 1$ y non ha punti di flesso (d) per $\alpha \le -1$ y è decrescente (e) per $\alpha \le -1$ y è limitata (f) $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -1$ per $\alpha < 0$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (c), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (b), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (b), (c), (f)

---

8. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + y'' - 2y' = 10\sin t \quad t > 0 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = -3 \end{cases}$$

è

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $y(t) = 2+3\cos t - \sin t$ $\boxed{\text{B}}$: $y(t) = 2+\cos t - 3\sin t$ $\boxed{\text{C}}$: $y(t) = 2-\cos t-3\sin t+2e^t$ $\boxed{\text{D}}$: $y(t) = 2-\cos t+3\sin t-e^{-2t}$ $\boxed{\text{E}}$: $y(t) = 2-3\cos t-\sin t$ $\boxed{\text{F}}$: $y(t) = 2-3\cos t+\sin t$

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. Sia $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 3 - \frac{1}{n^3} \\ 3n^6 \left(x - \left(3 - \frac{1}{n^3}\right)\right)^2 & \text{per } 3 - \frac{1}{n^3} < x \leq 3 \\ 3 & \text{per } x > 3 \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni:

(a) $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente su $[0,3]$ (c) $\{\int_0^3 f_n(x)\,dx\}$ non è limitata (d) $\{f_n'\}$ converge uniformemente su $[0,3[$ (e) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione discontinua (f) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione integrabile su $[0,10]$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c)

2. Discutere al variare di $\alpha \geq 0$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n[e^{\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n}]}{\alpha^n + n + 2}$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: diverge se $\alpha \geq 1$, converge se $0 \leq \alpha < 1$ $\boxed{\text{B}}$: diverge se $\alpha > 1$, converge se

$0 \le \alpha \le 1$ $\boxed{\text{C}}$: converge se $\alpha \ge 1$, diverge se $0 \le \alpha < 1$ $\boxed{\text{D}}$: converge per ogni $\alpha \ge 0$ $\boxed{\text{E}}$: diverge per ogni $\alpha \ge 0$ $\boxed{\text{F}}$: converge se $\alpha > 1$, diverge se $0 \le \alpha \le 1$

---

3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1 \right) [\sin^2(nx^2) + 6]$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \ge 0$ $\boxed{\text{B}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$ $\boxed{\text{C}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \le 0$ $\boxed{\text{D}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \ge 0$ $\boxed{\text{E}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha < 0$ $\boxed{\text{F}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$

---

4. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + y'' - 2y' = 10 \sin t \quad t > 0 \\ y(0) = 6 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = -3 \end{cases}$$

è

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $y(t) = 3 + 3\cos t - \sin t$ $\boxed{\text{B}}$: $y(t) = 3 + \cos t - 3\sin t$ $\boxed{\text{C}}$: $y(t) = 3 - \cos t - 3\sin t + 2e^t$ $\boxed{\text{D}}$: $y(t) = 3 - \cos t + 3\sin t - e^{-2t}$ $\boxed{\text{E}}$: $y(t) = 3 - 3\cos t - \sin t$ $\boxed{\text{F}}$: $y(t) = 3 - 3\cos t + \sin t$

---

5. Sia $\alpha > 0$. L'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{|1-t^2|^{3\alpha}}\, dt$ converge se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{1}{6} < \alpha < 1$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{1}{6} \le \alpha < 1$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha > \frac{1}{6}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{1}{6} < \alpha \le 1$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha \ge \frac{1}{6}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{1}{6} \le \alpha \le 1$

---

6. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan\left(\frac{y^2-4}{y^2+4}\right) \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per $\alpha > 4$ y è strettamente monotona (b) per $\alpha > 2$ y non ammette punti di estremo relativo (c) per $-2 < \alpha < 2$ y non ha punti di flesso (d) per $\alpha \le -2$ y è decrescente (e) per $\alpha \le -2$ y è limitata (f) $\lim_{t \to +\infty} y(t) = -2$ per $\alpha < 0$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (c), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (b), (c), (f)

---

7. Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n(n+2)}$. Delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge puntualmente e assolutamente in $\mathbb{R}$ (b) la serie converge puntualmente in $[-1, 1]$ (c) la somma della serie è una funzione pari (d) la somma della serie è una funzione dispari (e) la serie non converge totalmente in $[-1, 1]$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (c) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (d) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c) $\boxed{\text{E}}$: (b), (d) $\boxed{\text{F}}$: (b), (d), (e)

---

8. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni 2π-periodiche tali che

$$f(x) = \begin{cases} (x+\pi)^2 & \text{per } -\pi \leq x \leq 0 \\ (x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \leq \pi \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 3\alpha(x+\pi) & \text{per } -\pi \leq x \leq 0 \\ \beta(x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora se s_n è la ridotta parziale n-esima della serie di Fourier di $f+g$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\exists\alpha$ tale che $\forall\beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: $\exists\beta$ tale che $\forall\alpha$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: $\forall\alpha$ esiste uno ed un solo β tale che s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: $\forall\alpha, \beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: $\forall\alpha, \beta$ s_n non converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: $\exists\alpha$ tale che per nessun β s_n converge in media quadratica su $[-\pi, \pi]$

---

1. Sia $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 3 - \frac{1}{n^3} \\ 3n^6\left(x - \left(3 - \frac{1}{n^3}\right)\right)^2 & \text{per } 3 - \frac{1}{n^3} < x \leq 3 \\ 3 & \text{per } x > 3 \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni:

(a) $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente su $[0,3]$ (c) $\{\int_0^3 f_n(x)\,dx\}$ non è limitata (d) $\{f_n'\}$ converge uniformemente su $[0,3[$ (e) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione discontinua (f) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione integrabile su $[0,10]$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c)

---

2. Discutere al variare di $\alpha \geq 0$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n[e^{\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n}]}{\alpha^n + n + 2}$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: diverge se $\alpha \geq 1$, converge se $0 \leq \alpha < 1$ $\boxed{\text{B}}$: diverge se $\alpha > 1$, converge se $0 \leq \alpha \leq 1$ $\boxed{\text{C}}$: converge se $\alpha \geq 1$, diverge se $0 \leq \alpha < 1$ $\boxed{\text{D}}$: converge per ogni $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{E}}$: diverge per ogni $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{F}}$: converge se $\alpha > 1$, diverge se $0 \leq \alpha \leq 1$

---

3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}\left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1\right)[\sin^2(nx^2) + 6]$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{B}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$ $\boxed{\text{C}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \leq 0$ $\boxed{\text{D}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{E}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha < 0$ $\boxed{\text{F}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$

---

4. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + y'' - 2y' = 10\sin t \quad t > 0 \\ y(0) = 6 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = -3 \end{cases}$$

è

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $y(t) = 3 + 3\cos t - \sin t$ $\boxed{\text{B}}$: $y(t) = 3 + \cos t - 3\sin t$ $\boxed{\text{C}}$: $y(t) = 3 - \cos t - 3\sin t + 2e^t$ $\boxed{\text{D}}$: $y(t) = 3 - \cos t + 3\sin t - e^{-2t}$ $\boxed{\text{E}}$: $y(t) = 3 - 3\cos t - \sin t$ $\boxed{\text{F}}$: $y(t) = 3 - 3\cos t + \sin t$

---

5. Sia $\alpha > 0$. L'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{|1-t^2|^{3\alpha}}\, dt$ converge se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{1}{6} < \alpha < 1$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{1}{6} \leq \alpha < 1$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha > \frac{1}{6}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{1}{6} < \alpha \leq 1$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha \geq \frac{1}{6}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{1}{6} \leq \alpha \leq 1$

---

6. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan\left(\frac{y^2-4}{y^2+4}\right) \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per $\alpha > 4$ y è strettamente monotona (b) per $\alpha > 2$ y non ammette punti di estremo relativo (c) per $-2 < \alpha < 2$ y non ha punti di flesso (d) per $\alpha \leq -2$ y è decrescente (e) per $\alpha \leq -2$ y è limitata (f) $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -2$ per $\alpha < 0$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (c), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (b), (c), (f)

---

7. Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n(n+2)}$. Delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge puntualmente e assolutamente in $\mathbb{R}$ (b) la serie converge puntualmente in $[-1,1]$ (c) la somma della serie è una funzione pari (d) la somma della serie è una funzione dispari (e) la serie non converge totalmente in $[-1,1]$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (c) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (d) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c) $\boxed{\text{E}}$: (b), (d) $\boxed{\text{F}}$: (b), (d), (e)

---

8. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni 2π-periodiche tali che

$$f(x) = \begin{cases} (x+\pi)^2 & \text{per } -\pi \leq x \leq 0 \\ (x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \leq \pi \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 3\alpha(x+\pi) & \text{per } -\pi \leq x \leq 0 \\ \beta(x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora se s_n è la ridotta parziale n-esima della serie di Fourier di $f+g$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\exists\alpha$ tale che $\forall\beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: $\exists\beta$ tale che $\forall\alpha$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: $\forall\alpha$ esiste uno ed un solo β tale che s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: $\forall\alpha,\beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: $\forall\alpha,\beta$ s_n non converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: $\exists\alpha$ tale che per nessun β s_n converge in media quadratica su $[-\pi,\pi]$

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. Sia $\alpha > 0$. L'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{|1-t^2|^{4\alpha}}\,dt$ converge se e solo se

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{1}{8} \leq \alpha < \frac{3}{4}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{1}{8} < \alpha < \frac{3}{4}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{1}{8} < \alpha \leq \frac{3}{4}$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha > \frac{1}{8}$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha \geq \frac{1}{8}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{1}{8} \leq \alpha \leq \frac{3}{4}$

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan\left(\frac{y^2-9}{y^2+9}\right) \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

   Delle seguenti affermazioni

   (a) per $\alpha > 6$ y è strettamente monotona (b) per $\alpha > 3$ y non ammette punti di estremo relativo (c) per $-3 < \alpha < 3$ y non ha punti di flesso (d) per $\alpha \leq -3$ y è decrescente (e) per $\alpha \leq -3$ y è limitata (f) $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -3$ per $\alpha < 0$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (c), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (c), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{E}}$: (b), (c) $\boxed{\text{F}}$: (b), (f)

3. Discutere al variare di $\alpha \geq 0$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n[e^{\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n}]}{\alpha^n + n + 3}$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: diverge se $\alpha > 1$, converge se $0 \leq \alpha \leq 1$ $\boxed{\text{B}}$: converge per ogni $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{C}}$: converge se $\alpha > 1$, diverge se $0 \leq \alpha \leq 1$ $\boxed{\text{D}}$: converge se $\alpha \geq 1$, diverge se $0 \leq \alpha < 1$ $\boxed{\text{E}}$: diverge per ogni $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{F}}$: diverge se $\alpha \geq 1$, converge se $0 \leq \alpha < 1$

---

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1 \right) [\sin^2(nx^2) + 5]$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha < 0$ $\boxed{\text{B}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$ $\boxed{\text{C}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \leq 0$ $\boxed{\text{D}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{E}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$ $\boxed{\text{F}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \geq 0$

---

5. Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n(n+3)}$. Delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge puntualmente e assolutamente in $\mathbb{R}$ (b) la serie converge puntualmente in $[-1, 1]$ (c) la somma della serie è una funzione pari (d) la somma della serie è una funzione dispari (e) la serie non converge totalmente in $[-1, 1]$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (d) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (b), (c) $\boxed{\text{E}}$: (a), (b), (d) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c)

---

6. Sia $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 4 - \frac{1}{n^4} \\ 4n^8 \left(x - \left(4 - \frac{1}{n^4} \right) \right)^2 & \text{per } 4 - \frac{1}{n^4} < x \leq 4 \\ 4 & \text{per } x > 4 \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni:

(a) $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente su $[0, 4]$ (c) $\{\int_0^4 f_n(x)\, dx\}$ non è limitata (d) $\{f_n'\}$ converge uniformemente su $[0, 4[$ (e) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione discontinua (f) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione integrabile su $[0, 10]$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c)

---

7. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni 2π-periodiche tali che

$$f(x) = \begin{cases} (x + \pi)^2 & \text{per } -\pi \leq x \leq 0 \\ (x - \pi)^2 & \text{per } 0 < x \leq \pi \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 4\alpha(x + \pi) & \text{per } -\pi \leq x \leq 0 \\ \beta(x - \pi)^2 & \text{per } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora se s_n è la ridotta parziale n-esima della serie di Fourier di $f + g$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\forall\alpha$ esiste uno ed un solo β tale che s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: $\forall\alpha, \beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: $\exists\alpha$ tale che per nessun β s_n converge in media quadratica su $[-\pi, \pi]$ $\boxed{\text{D}}$: $\forall\alpha, \beta$ s_n non converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: $\exists\alpha$ tale che $\forall\beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: $\exists\beta$ tale che $\forall\alpha$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$

---

8. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + y'' - 2y' = 10\sin t \quad t > 0 \\ y(0) = 7 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = -3 \end{cases}$$

è

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $y(t) = 4 + 3\cos t - \sin t$ $\boxed{\text{B}}$: $y(t) = 4 - 3\cos t - \sin t$ $\boxed{\text{C}}$: $y(t) = 4 + \cos t - 3\sin t$ $\boxed{\text{D}}$: $y(t) = 4 - \cos t - 3\sin t + 2e^t$ $\boxed{\text{E}}$: $y(t) = 4 - \cos t + 3\sin t - e^{-2t}$ $\boxed{\text{F}}$: $y(t) = 4 - 3\cos t + \sin t$

---

1. Sia $\alpha > 0$. L'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{|1-t^2|^{4\alpha}}\,dt$ converge se e solo se

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{1}{8} \le \alpha < \frac{3}{4}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{1}{8} < \alpha < \frac{3}{4}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{1}{8} < \alpha \le \frac{3}{4}$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha > \frac{1}{8}$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha \ge \frac{1}{8}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{1}{8} \le \alpha \le \frac{3}{4}$

---

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan\left(\frac{y^2-9}{y^2+9}\right) \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

   Delle seguenti affermazioni

   (a) per $\alpha > 6$ y è strettamente monotona (b) per $\alpha > 3$ y non ammette punti di estremo relativo (c) per $-3 < \alpha < 3$ y non ha punti di flesso (d) per $\alpha \le -3$ y è decrescente (e) per $\alpha \le -3$ y è limitata (f) $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -3$ per $\alpha < 0$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (c), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (c), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{E}}$: (b), (c) $\boxed{\text{F}}$: (b), (f)

---

3. Discutere al variare di $\alpha \ge 0$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n[e^{\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n}]}{\alpha^n + n + 3}$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: diverge se $\alpha > 1$, converge se $0 \le \alpha \le 1$ $\boxed{\text{B}}$: converge per ogni $\alpha \ge 0$ $\boxed{\text{C}}$: converge se $\alpha > 1$, diverge se $0 \le \alpha \le 1$ $\boxed{\text{D}}$: converge se $\alpha \ge 1$, diverge se $0 \le \alpha < 1$ $\boxed{\text{E}}$: diverge per ogni $\alpha \ge 0$ $\boxed{\text{F}}$: diverge se $\alpha \ge 1$, converge se $0 \le \alpha < 1$

---

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}\left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1\right)[\sin^2(nx^2) + 5]$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha < 0$ $\boxed{\text{B}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$ $\boxed{\text{C}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \le 0$ $\boxed{\text{D}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \ge 0$ $\boxed{\text{E}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$ $\boxed{\text{F}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \ge 0$

---

5. Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n(n+3)}$. Delle seguenti affermazioni

   (a) la serie converge puntualmente e assolutamente in $\mathbb{R}$ (b) la serie converge puntualmente in $[-1,1]$ (c) la somma della serie è una funzione pari (d) la somma della serie è una funzione dispari (e) la serie non converge totalmente in $[-1,1]$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (d) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (b), (c) $\boxed{\text{E}}$: (a), (b), (d) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c)

---

6. Sia $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 4 - \frac{1}{n^4} \\ 4n^8 \left(x - \left(4 - \frac{1}{n^4}\right)\right)^2 & \text{per } 4 - \frac{1}{n^4} < x \leq 4 \\ 4 & \text{per } x > 4 \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni:

(a) $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente su $[0,4]$ (c) $\{\int_0^4 f_n(x)\,dx\}$ non è limitata (d) $\{f_n'\}$ converge uniformemente su $[0,4[$ (e) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione discontinua (f) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione integrabile su $[0,10]$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c)

---

7. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni 2π-periodiche tali che

$$f(x) = \begin{cases} (x+\pi)^2 & \text{per } -\pi \leq x \leq 0 \\ (x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \leq \pi \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 4\alpha(x+\pi) & \text{per } -\pi \leq x \leq 0 \\ \beta(x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora se s_n è la ridotta parziale n-esima della serie di Fourier di $f+g$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\forall\alpha$ esiste uno ed un solo β tale che s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: $\forall\alpha,\beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: $\exists\alpha$ tale che per nessun β s_n converge in media quadratica su $[-\pi,\pi]$ $\boxed{\text{D}}$: $\forall\alpha,\beta$ s_n non converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: $\exists\alpha$ tale che $\forall\beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: $\exists\beta$ tale che $\forall\alpha$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$

---

8. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + y'' - 2y' = 10\sin t \quad t > 0 \\ y(0) = 7 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = -3 \end{cases}$$

è

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $y(t) = 4 + 3\cos t - \sin t$ $\boxed{\text{B}}$: $y(t) = 4 - 3\cos t - \sin t$ $\boxed{\text{C}}$: $y(t) = 4 + \cos t - 3\sin t$ $\boxed{\text{D}}$: $y(t) = 4 - \cos t - 3\sin t + 2e^t$ $\boxed{\text{E}}$: $y(t) = 4 - \cos t + 3\sin t - e^{-2t}$ $\boxed{\text{F}}$: $y(t) = 4 - 3\cos t + \sin t$

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n(n+4)}$. Delle seguenti affermazioni

   (a) la serie converge puntualmente e assolutamente in $\mathbb{R}$ (b) la serie converge puntualmente in $[-1,1]$ (c) la somma della serie è una funzione pari (d) la somma della serie è una funzione dispari (e) la serie non converge totalmente in $[-1,1]$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d) $\boxed{\text{D}}$: (a), (b), (c) $\boxed{\text{E}}$: (a), (b), (d) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c)

2. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + y'' - 2y' = 10\sin t \quad t > 0 \\ y(0) = 8 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = -3 \end{cases}$$

   è

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $y(t) = 5 + \cos t - 3\sin t$ $\boxed{\text{B}}$: $y(t) = 5 + 3\cos t - \sin t$ $\boxed{\text{C}}$: $y(t) = 5 - 3\cos t - \sin t$ $\boxed{\text{D}}$: $y(t) = 5 - \cos t + 3\sin t - e^{-2t}$ $\boxed{\text{E}}$: $y(t) = 5 - 3\cos t + \sin t$ $\boxed{\text{F}}$: $y(t) = 5 - \cos t - 3\sin t + 2e^t$

3. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni 2π-periodiche tali che

$$f(x) = \begin{cases} (x+\pi)^2 & \text{per } -\pi \le x \le 0 \\ (x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \le \pi \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 5\alpha(x+\pi) & \text{per } -\pi \le x \le 0 \\ \beta(x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora se s_n è la ridotta parziale n-esima della serie di Fourier di $f+g$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\forall\alpha$ esiste uno ed un solo β tale che s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: $\forall\alpha, \beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: $\exists\beta$ tale che $\forall\alpha$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: $\exists\alpha$ tale che per nessun β s_n converge in media quadratica su $[-\pi, \pi]$ $\boxed{\text{E}}$: $\forall\alpha, \beta$ s_n non converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: $\exists\alpha$ tale che $\forall\beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$

---

4. Discutere al variare di $\alpha \ge 0$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n[e^{\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n}]}{\alpha^n + n + 4}$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge se $\alpha > 1$, diverge se $0 \le \alpha \le 1$ $\boxed{\text{B}}$: converge se $\alpha \ge 1$, diverge se $0 \le \alpha < 1$ $\boxed{\text{C}}$: diverge per ogni $\alpha \ge 0$ $\boxed{\text{D}}$: diverge se $\alpha \ge 1$, converge se $0 \le \alpha < 1$ $\boxed{\text{E}}$: diverge se $\alpha > 1$, converge se $0 \le \alpha \le 1$ $\boxed{\text{F}}$: converge per ogni $\alpha \ge 0$

---

5. Sia $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \le 5 - \frac{1}{n^5} \\ 5n^{10}\left(x - \left(5 - \frac{1}{n^5}\right)\right)^2 & \text{per } 5 - \frac{1}{n^5} < x \le 5 \\ 5 & \text{per } x > 5 \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni:

(a) $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente su $[0, 5]$ (c) $\{\int_0^5 f_n(x)\,dx\}$ non è limitata (d) $\{f_n'\}$ converge uniformemente su $[0, 5[$ (e) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione discontinua (f) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione integrabile su $[0, 10]$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c) $\boxed{\text{E}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (e)

---

6. Sia $\alpha > 0$. L'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{|1-t^2|^{5\alpha}}\,dt$ converge se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{1}{10} \le \alpha \le \frac{3}{5}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{1}{10} \le \alpha < \frac{3}{5}$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha > \frac{1}{10}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{1}{10} < \alpha < \frac{3}{5}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{1}{10} < \alpha \le \frac{3}{5}$ $\boxed{\text{F}}$: $\alpha \ge \frac{1}{10}$

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan\left(\frac{y^2-16}{y^2+16}\right) \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per $\alpha > 8$ y è strettamente monotona (b) per $\alpha > 4$ y non ammette punti di estremo relativo (c) per $-4 < \alpha < 4$ y non ha punti di flesso (d) per $\alpha \leq -4$ y è decrescente (e) per $\alpha \leq -4$ y è limitata (f) $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -4$ per $\alpha < 0$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (c), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (c), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c) $\boxed{\text{E}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{F}}$: (b), (f)

---

8. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1 \right) [\sin^2(nx^2) + 4]$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{B}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha < 0$ $\boxed{\text{C}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \leq 0$ $\boxed{\text{D}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$ $\boxed{\text{E}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$ $\boxed{\text{F}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \geq 0$

---

1. Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n(n+4)}$. Delle seguenti affermazioni

   (a) la serie converge puntualmente e assolutamente in $\mathbb{R}$ (b) la serie converge puntualmente in $[-1,1]$ (c) la somma della serie è una funzione pari (d) la somma della serie è una funzione dispari (e) la serie non converge totalmente in $[-1,1]$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d) $\boxed{\text{D}}$: (a), (b), (c) $\boxed{\text{E}}$: (a), (b), (d) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c)

---

2. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + y'' - 2y' = 10\sin t & t > 0 \\ y(0) = 8 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = -3 \end{cases}$$

   è

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $y(t) = 5 + \cos t - 3\sin t$ $\boxed{\text{B}}$: $y(t) = 5 + 3\cos t - \sin t$ $\boxed{\text{C}}$: $y(t) = 5 - 3\cos t - \sin t$ $\boxed{\text{D}}$: $y(t) = 5 - \cos t + 3\sin t - e^{-2t}$ $\boxed{\text{E}}$: $y(t) = 5 - 3\cos t + \sin t$ $\boxed{\text{F}}$: $y(t) = 5 - \cos t - 3\sin t + 2e^t$

---

3. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni 2π-periodiche tali che

$$f(x) = \begin{cases} (x+\pi)^2 & \text{per } -\pi \le x \le 0 \\ (x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \le \pi \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 5\alpha(x+\pi) & \text{per } -\pi \le x \le 0 \\ \beta(x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

   con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora se s_n è la ridotta parziale n-esima della serie di Fourier di $f + g$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\forall \alpha$ esiste uno ed un solo β tale che s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: $\forall \alpha, \beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: $\exists \beta$ tale che $\forall \alpha$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: $\exists \alpha$ tale che per nessun β s_n converge in media quadratica su $[-\pi, \pi]$ $\boxed{\text{E}}$: $\forall \alpha, \beta$ s_n non converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: $\exists \alpha$ tale che $\forall \beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$

---

4. Discutere al variare di $\alpha \ge 0$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n[e^{\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n}]}{\alpha^n + n + 4}$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge se $\alpha > 1$, diverge se $0 \le \alpha \le 1$ $\boxed{\text{B}}$: converge se $\alpha \ge 1$, diverge se $0 \le \alpha < 1$ $\boxed{\text{C}}$: diverge per ogni $\alpha \ge 0$ $\boxed{\text{D}}$: diverge se $\alpha \ge 1$, converge se $0 \le \alpha < 1$ $\boxed{\text{E}}$: diverge se $\alpha > 1$, converge se $0 \le \alpha \le 1$ $\boxed{\text{F}}$: converge per ogni $\alpha \ge 0$

---

5. Sia $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \le 5 - \frac{1}{n^5} \\ 5n^{10}\left(x - \left(5 - \frac{1}{n^5}\right)\right)^2 & \text{per } 5 - \frac{1}{n^5} < x \le 5 \\ 5 & \text{per } x > 5 \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni:

(a) $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente su $[0,5]$ (c) $\{\int_0^5 f_n(x)\,dx\}$ non è limitata (d) $\{f_n'\}$ converge uniformemente su $[0,5[$ (e) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione discontinua (f) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione integrabile su $[0,10]$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c) $\boxed{\text{E}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (e)

---

6. Sia $\alpha > 0$. L'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{|1-t^2|^{5\alpha}}\,dt$ converge se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{1}{10} \leq \alpha \leq \frac{3}{5}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{1}{10} \leq \alpha < \frac{3}{5}$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha > \frac{1}{10}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{1}{10} < \alpha < \frac{3}{5}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{1}{10} < \alpha \leq \frac{3}{5}$ $\boxed{\text{F}}$: $\alpha \geq \frac{1}{10}$

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan\left(\frac{y^2-16}{y^2+16}\right) \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per $\alpha > 8$ y è strettamente monotona (b) per $\alpha > 4$ y non ammette punti di estremo relativo (c) per $-4 < \alpha < 4$ y non ha punti di flesso (d) per $\alpha \leq -4$ y è decrescente (e) per $\alpha \leq -4$ y è limitata (f) $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -4$ per $\alpha < 0$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (c), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (c), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c) $\boxed{\text{E}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{F}}$: (b), (f)

---

8. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}\left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1\right)[\sin^2(nx^2) + 4]$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{B}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha < 0$ $\boxed{\text{C}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \leq 0$ $\boxed{\text{D}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$ $\boxed{\text{E}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$ $\boxed{\text{F}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \geq 0$

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n(n+5)}$. Delle seguenti affermazioni

   (a) la serie converge puntualmente e assolutamente in $\mathbb{R}$ (b) la serie converge puntualmente in $[-1,1]$ (c) la somma della serie è una funzione pari (d) la somma della serie è una funzione dispari (e) la serie non converge totalmente in $[-1,1]$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (c) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b), (d) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c) $\boxed{\text{E}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{F}}$: (b), (d), (e)

2. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + y'' - 2y' = 10\sin t \quad t > 0 \\ y(0) = 9 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = -3 \end{cases}$$

   è

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $y(t) = 6 - 3\cos t + \sin t$ $\boxed{\text{B}}$: $y(t) = 6 + \cos t - 3\sin t$ $\boxed{\text{C}}$: $y(t) = 6 + 3\cos t - \sin t$ $\boxed{\text{D}}$: $y(t) = 6 - 3\cos t - \sin t$ $\boxed{\text{E}}$: $y(t) = 6 - \cos t + 3\sin t - e^{-2t}$ $\boxed{\text{F}}$: $y(t) = 6 - \cos t - 3\sin t + 2e^t$

3. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni 2π-periodiche tali che

$$f(x) = \begin{cases} (x+\pi)^2 & \text{per } -\pi \le x \le 0 \\ (x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \le \pi \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 6\alpha(x+\pi) & \text{per } -\pi \le x \le 0 \\ \beta(x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora se s_n è la ridotta parziale n-esima della serie di Fourier di $f+g$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\exists\alpha$ tale che $\forall\beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: $\forall\alpha,\beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: $\forall\alpha,\beta$ s_n non converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: $\exists\beta$ tale che $\forall\alpha$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: $\forall\alpha$ esiste uno ed un solo β tale che s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: $\exists\alpha$ tale che per nessun β s_n converge in media quadratica su $[-\pi,\pi]$

---

4. Sia $\alpha > 0$. L'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{|1-t^2|^{6\alpha}}\, dt$ converge se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{1}{12} \le \alpha \le \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{1}{12} \le \alpha < \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{1}{12} < \alpha \le \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha > \frac{1}{12}$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha \ge \frac{1}{12}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{1}{12} < \alpha < \frac{1}{2}$

---

5. Discutere al variare di $\alpha \ge 0$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n[e^{\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n}]}{\alpha^n + n + 5}$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge per ogni $\alpha \ge 0$ $\boxed{\text{B}}$: converge se $\alpha > 1$, diverge se $0 \le \alpha \le 1$ $\boxed{\text{C}}$: converge se $\alpha \ge 1$, diverge se $0 \le \alpha < 1$ $\boxed{\text{D}}$: diverge per ogni $\alpha \ge 0$ $\boxed{\text{E}}$: diverge se $\alpha \ge 1$, converge se $0 \le \alpha < 1$ $\boxed{\text{F}}$: diverge se $\alpha > 1$, converge se $0 \le \alpha \le 1$

---

6. Sia $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \le 6 - \frac{1}{n^6} \\ 6n^{12}\left(x - \left(6 - \frac{1}{n^6}\right)\right)^2 & \text{per } 6 - \frac{1}{n^6} < x \le 6 \\ 6 & \text{per } x > 6 \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni:

(a) $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente su $[0,6]$ (c) $\{\int_0^6 f_n(x)\,dx\}$ non è limitata (d) $\{f_n'\}$ converge uniformemente su $[0,6[$ (e) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione discontinua (f) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione integrabile su $[0,10]$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{F}}$: (a), (e)

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1\right) [\sin^2(nx^2) + 3]$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$ $\boxed{\text{B}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \ge 0$ $\boxed{\text{C}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$ $\boxed{\text{D}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \le 0$ $\boxed{\text{E}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha < 0$ $\boxed{\text{F}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \ge 0$

---

8. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan\left(\frac{y^2-25}{y^2+25}\right) \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per $\alpha > 10$ y è strettamente monotona (b) per $\alpha > 5$ y non ammette punti di estremo relativo (c) per $-5 < \alpha < 5$ y non ha punti di flesso (d) per $\alpha \leq -5$ y è decrescente (e) per $\alpha \leq -5$ y è limitata (f) $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -5$ per $\alpha < 0$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (c), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (b), (c), (f)

1. Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n(n+5)}$. Delle seguenti affermazioni

   (a) la serie converge puntualmente e assolutamente in $\mathbb{R}$ (b) la serie converge puntualmente in $[-1,1]$ (c) la somma della serie è una funzione pari (d) la somma della serie è una funzione dispari (e) la serie non converge totalmente in $[-1,1]$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (b), (c) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d) $\boxed{\text{C}}$: (a), (b), (d) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c) $\boxed{\text{E}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{F}}$: (b), (d), (e)

---

2. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + y'' - 2y' = 10\sin t \quad t > 0 \\ y(0) = 9 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = -3 \end{cases}$$

   è

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $y(t) = 6 - 3\cos t + \sin t$ $\boxed{\text{B}}$: $y(t) = 6 + \cos t - 3\sin t$ $\boxed{\text{C}}$: $y(t) = 6 + 3\cos t - \sin t$ $\boxed{\text{D}}$: $y(t) = 6 - 3\cos t - \sin t$ $\boxed{\text{E}}$: $y(t) = 6 - \cos t + 3\sin t - e^{-2t}$ $\boxed{\text{F}}$: $y(t) = 6 - \cos t - 3\sin t + 2e^t$

---

3. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni 2π-periodiche tali che

$$f(x) = \begin{cases} (x+\pi)^2 & \text{per } -\pi \le x \le 0 \\ (x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \le \pi \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 6\alpha(x+\pi) & \text{per } -\pi \le x \le 0 \\ \beta(x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

   con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora se s_n è la ridotta parziale n-esima della serie di Fourier di $f + g$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\exists\alpha$ tale che $\forall\beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: $\forall\alpha,\beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: $\forall\alpha,\beta$ s_n non converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: $\exists\beta$ tale che $\forall\alpha$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$: $\forall\alpha$ esiste uno ed un solo β tale che s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: $\exists\alpha$ tale che per nessun β s_n converge in media quadratica su $[-\pi,\pi]$

---

4. Sia $\alpha > 0$. L'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{|1-t^2|^{6\alpha}}\, dt$ converge se e solo se

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{1}{12} \le \alpha \le \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{1}{12} \le \alpha < \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{1}{12} < \alpha \le \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha > \frac{1}{12}$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha \ge \frac{1}{12}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{1}{12} < \alpha < \frac{1}{2}$

---

5. Discutere al variare di $\alpha \ge 0$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n[e^{\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n}]}{\alpha^n + n + 5}$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge per ogni $\alpha \ge 0$ $\boxed{\text{B}}$: converge se $\alpha > 1$, diverge se $0 \le \alpha \le 1$ $\boxed{\text{C}}$: converge se $\alpha \ge 1$, diverge se $0 \le \alpha < 1$ $\boxed{\text{D}}$: diverge per ogni $\alpha \ge 0$ $\boxed{\text{E}}$: diverge se $\alpha \ge 1$, converge se $0 \le \alpha < 1$ $\boxed{\text{F}}$: diverge se $\alpha > 1$, converge se $0 \le \alpha \le 1$

---

6. Sia $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 6 - \frac{1}{n^6} \\ 6n^{12}\left(x - \left(6 - \frac{1}{n^6}\right)\right)^2 & \text{per } 6 - \frac{1}{n^6} < x \leq 6 \\ 6 & \text{per } x > 6 \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni:

(a) $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente su $[0,6]$ (c) $\{\int_0^6 f_n(x)\,dx\}$ non è limitata (d) $\{f_n'\}$ converge uniformemente su $[0,6[$ (e) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione discontinua (f) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione integrabile su $[0,10]$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{F}}$: (a), (e)

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}\left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1\right)[\sin^2(nx^2) + 3]$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$ $\boxed{\text{B}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{C}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$ $\boxed{\text{D}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \leq 0$ $\boxed{\text{E}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha < 0$ $\boxed{\text{F}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \geq 0$

---

8. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan\left(\frac{y^2-25}{y^2+25}\right) \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per $\alpha > 10$ y è strettamente monotona (b) per $\alpha > 5$ y non ammette punti di estremo relativo (c) per $-5 < \alpha < 5$ y non ha punti di flesso (d) per $\alpha \leq -5$ y è decrescente (e) per $\alpha \leq -5$ y è limitata (f) $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -5$ per $\alpha < 0$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (c), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (b), (c), (f)

Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}\left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1\right)[\sin^2(nx^2) + 2]$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \leq 0$ $\boxed{\text{B}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$ $\boxed{\text{C}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{D}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha < 0$ $\boxed{\text{E}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$ $\boxed{\text{F}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \geq 0$

2. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + y'' - 2y' = 10\sin t \quad t > 0 \\ y(0) = 10 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = -3 \end{cases}$$

   è

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $y(t) = 7+3\cos t - \sin t$ $\boxed{\text{B}}$: $y(t) = 7+\cos t - 3\sin t$ $\boxed{\text{C}}$: $y(t) = 7-\cos t - 3\sin t + 2e^t$ $\boxed{\text{D}}$: $y(t) = 7 - 3\cos t - \sin t$ $\boxed{\text{E}}$: $y(t) = 7 - 3\cos t + \sin t$ $\boxed{\text{F}}$: $y(t) = 7 - \cos t + 3\sin t - e^{-2t}$

3. Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n(n+6)}$. Delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge puntualmente e assolutamente in $\mathbb{R}$ (b) la serie converge puntualmente in $[-1,1]$ (c) la somma della serie è una funzione pari (d) la somma della serie è una funzione dispari (e) la serie non converge totalmente in $[-1,1]$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (b), (c) $\boxed{\text{E}}$: (a), (b), (d) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c), (e)

---

4. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni 2π-periodiche tali che

$$f(x) = \begin{cases} (x+\pi)^2 & \text{per } -\pi \le x \le 0 \\ (x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \le \pi \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 7\alpha(x+\pi) & \text{per } -\pi \le x \le 0 \\ \beta(x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora se s_n è la ridotta parziale n-esima della serie di Fourier di $f+g$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\forall \alpha, \beta$ s_n non converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: $\forall \alpha$ esiste uno ed un solo β tale che s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: $\forall \alpha, \beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: $\exists \alpha$ tale che per nessun β s_n converge in media quadratica su $[-\pi, \pi]$ $\boxed{\text{E}}$: $\exists \alpha$ tale che $\forall \beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: $\exists \beta$ tale che $\forall \alpha$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$

---

5. Sia $\alpha > 0$. L'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{|1-t^2|^{7\alpha}}\,dt$ converge se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{1}{14} \le \alpha \le \frac{3}{7}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{1}{14} \le \alpha < \frac{3}{7}$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha > \frac{1}{14}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{1}{14} < \alpha < \frac{3}{7}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{1}{14} < \alpha \le \frac{3}{7}$ $\boxed{\text{F}}$: $\alpha \ge \frac{1}{14}$

---

6. Discutere al variare di $\alpha \ge 0$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n[e^{\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n}]}{\alpha^n + n + 6}$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: diverge se $\alpha > 1$, converge se $0 \le \alpha \le 1$ $\boxed{\text{B}}$: converge per ogni $\alpha \ge 0$ $\boxed{\text{C}}$: converge se $\alpha > 1$, diverge se $0 \le \alpha \le 1$ $\boxed{\text{D}}$: converge se $\alpha \ge 1$, diverge se $0 \le \alpha < 1$ $\boxed{\text{E}}$: diverge per ogni $\alpha \ge 0$ $\boxed{\text{F}}$: diverge se $\alpha \ge 1$, converge se $0 \le \alpha < 1$

---

7. Sia $\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \le 7 - \frac{1}{n^7} \\ 7n^{14}\left(x - \left(7 - \frac{1}{n^7}\right)\right)^2 & \text{per } 7 - \frac{1}{n^7} < x \le 7 \\ 7 & \text{per } x > 7 \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni:

(a) $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente su $[0,7]$ (c) $\{\int_0^7 f_n(x)\,dx\}$ non è limitata (d) $\{f_n'\}$ converge uniformemente su $[0,7[$ (e) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione discontinua (f) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione integrabile su $[0,10]$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (b), (f)

---

8. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan\left(\frac{y^2-36}{y^2+36}\right) \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per $\alpha > 12$ y è strettamente monotona (b) per $\alpha > 6$ y non ammette punti di estremo relativo (c) per $-6 < \alpha < 6$ y non ha punti di flesso (d) per $\alpha \leq -6$ y è decrescente (e) per $\alpha \leq -6$ y è limitata (f) $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -6$ per $\alpha < 0$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (c), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (c), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (f) $\boxed{\text{E}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{F}}$: (a), (b), (f)

---

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}\left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1\right)[\sin^2(nx^2)+2]$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \le 0$ $\boxed{\text{B}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$ $\boxed{\text{C}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \ge 0$ $\boxed{\text{D}}$: converge puntualmente ma non totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha < 0$ $\boxed{\text{E}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha > 0$ $\boxed{\text{F}}$: converge totalmente su $\mathbb{R}$ per $\alpha \ge 0$

---

2. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + y'' - 2y' = 10\sin t \quad t > 0 \\ y(0) = 10 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = -3 \end{cases}$$

   è

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $y(t) = 7+3\cos t-\sin t$ $\boxed{\text{B}}$: $y(t) = 7+\cos t-3\sin t$ $\boxed{\text{C}}$: $y(t) = 7-\cos t-3\sin t+2e^t$ $\boxed{\text{D}}$: $y(t) = 7-3\cos t-\sin t$ $\boxed{\text{E}}$: $y(t) = 7-3\cos t+\sin t$ $\boxed{\text{F}}$: $y(t) = 7-\cos t+3\sin t-e^{-2t}$

---

3. Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n(n+6)}$. Delle seguenti affermazioni

   (a) la serie converge puntualmente e assolutamente in $\mathbb{R}$ (b) la serie converge puntualmente in $[-1,1]$ (c) la somma della serie è una funzione pari (d) la somma della serie è una funzione dispari (e) la serie non converge totalmente in $[-1,1]$

   le uniche corrette sono

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (b), (c) $\boxed{\text{E}}$: (a), (b), (d) $\boxed{\text{F}}$: (b), (c), (e)

---

4. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni 2π-periodiche tali che

$$f(x) = \begin{cases} (x+\pi)^2 & \text{per } -\pi \le x \le 0 \\ (x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \le \pi \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 7\alpha(x+\pi) & \text{per } -\pi \le x \le 0 \\ \beta(x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

   con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora se s_n è la ridotta parziale n-esima della serie di Fourier di $f+g$

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\forall \alpha, \beta$ s_n non converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: $\forall \alpha$ esiste uno ed un solo β tale che s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{C}}$: $\forall \alpha, \beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{D}}$: $\exists \alpha$ tale che per nessun β s_n converge in media quadratica su $[-\pi, \pi]$ $\boxed{\text{E}}$: $\exists \alpha$ tale che $\forall \beta$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: $\exists \beta$ tale che $\forall \alpha$ s_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$

---

5. Sia $\alpha > 0$. L'integrale improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{|1-t^2|^{7\alpha}}\, dt$ converge se e solo se

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{1}{14} \le \alpha \le \frac{3}{7}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{1}{14} \le \alpha < \frac{3}{7}$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha > \frac{1}{14}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{1}{14} < \alpha < \frac{3}{7}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{1}{14} < \alpha \le \frac{3}{7}$ $\boxed{\text{F}}$: $\alpha \ge \frac{1}{14}$

---

6. Discutere al variare di $\alpha \geq 0$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n[e^{\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{n}]}{\alpha^n + n + 6}$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: diverge se $\alpha > 1$, converge se $0 \leq \alpha \leq 1$ $\boxed{\text{B}}$: converge per ogni $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{C}}$: converge se $\alpha > 1$, diverge se $0 \leq \alpha \leq 1$ $\boxed{\text{D}}$: converge se $\alpha \geq 1$, diverge se $0 \leq \alpha < 1$ $\boxed{\text{E}}$: diverge per ogni $\alpha \geq 0$ $\boxed{\text{F}}$: diverge se $\alpha \geq 1$, converge se $0 \leq \alpha < 1$

---

7. Sia $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 7 - \frac{1}{n^7} \\ 7n^{14}\left(x - \left(7 - \frac{1}{n^7}\right)\right)^2 & \text{per } 7 - \frac{1}{n^7} < x \leq 7 \\ 7 & \text{per } x > 7 \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni:

(a) $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (b) $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente su $[0, 7]$ (c) $\{\int_0^7 f_n(x)\,dx\}$ non è limitata (d) $\{f_n'\}$ converge uniformemente su $[0, 7[$ (e) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione discontinua (f) il limite puntuale di $\{f_n\}$ è una funzione integrabile su $[0, 10]$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (b), (f)

---

8. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan\left(\frac{y^2-36}{y^2+36}\right) \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per $\alpha > 12$ y è strettamente monotona (b) per $\alpha > 6$ y non ammette punti di estremo relativo (c) per $-6 < \alpha < 6$ y non ha punti di flesso (d) per $\alpha \leq -6$ y è decrescente (e) per $\alpha \leq -6$ y è limitata (f) $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -6$ per $\alpha < 0$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (c), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (c), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b), (f) $\boxed{\text{E}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{F}}$: (a), (b), (f)
