Nome, Cognome, Matricola:

Tempo a disposizione: 90 minuti

ESERCIZI

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = xy\, e^{-(x^2+y^2)}$$

Allora f ammette

$\boxed{\text{A}}$: un punto di minimo relativo, due punti di sella e due punti di massimo relativo $\boxed{\text{B}}$: un punto di massimo relativo, due punti di sella e un punto di minimo relativo $\boxed{\text{C}}$: un punto di sella, due punti di massimo relativo e due punti di minimo relativo $\boxed{\text{D}}$: quattro punti di massimo relativo e un punto di sella $\boxed{\text{E}}$: quattro punti di minimo relativo e un punto di sella

Punteggio: 7

2. Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ dato da

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 2x + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le x^2 + y^2\right\}.$$

Allora l'integrale triplo

$$\iiint_V (2 + y)\, dxdydz$$

vale

$\boxed{\text{A}}$: 6π $\boxed{\text{B}}$: 8π $\boxed{\text{C}}$: 4π $\boxed{\text{D}}$: 2π $\boxed{\text{E}}$: $\frac{\pi}{2}$

Punteggio: 6

3. Data la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{1 + nx^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

(a) determinare i valori di α per cui f_n converge puntualmente in $\mathbb{R}$;

(b) determinare i valori di α per cui la funzione limite $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ risulta continua in $\mathbb{R}$;

(c) determinare i valori di α per cui f_n converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

Punteggio: 7

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $2\pi-$periodica, integrabile in $[0, 2\pi]$, e tale che $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Siano a_n e b_n i coefficienti di Fourier di f. Detta $S(x)$ la somma della serie di Fourier di f in $x \in \mathbb{R}$, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date.

(a) Se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

converge totalmente in $\mathbb{R}$, allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale $S(x) = f(x)$.

(b) Se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

converge puntualmente in $\mathbb{R}$, allora f è continua in $\mathbb{R}$.

(c) Se f è continua in $\mathbb{R}$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

Punteggio: 6

Domanda 2.

Sia $\vec{F} = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = 1 \quad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date.

(a) F_1 e F_2 sono differenziabili in $\mathbb{R}^2$.

(b) $\vec{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$.

(c) Sia Γ una curva a valori in $\mathbb{R}^2$, regolare, semplice, chiusa e percorsa in senso antiorario. Sia A la regione di piano interna a Γ. Allora

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\Gamma = area(A).$$

Punteggio: 6
