Nome, Cognome, Matricola:

ESERCIZI

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2y\sin(x^2+y^2)}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette giustificando le risposte date.
(a) f è continua in $(0,0)$ (b) $\nabla f(0,0) = (0,2))$ (c) f ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ (d) vale la formula $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$ per ogni versore $\vec{v}$ di $\mathbb{R}^2$
(e) f è differenziabile in $(0,0)$.

Punteggio: 7

---

2. Data la funzione
$$f(x,y,z) = \frac{2z}{1+x^2+y^2+z^2}$$
e l'insieme
$$D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \leq 1, \ z \geq 0\big\},$$
calcolare
$$\iiint_D f\, dxdydz.$$
Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\pi\big[1-\log(2)\big]$ $\boxed{\text{B}}$: $\pi\big[1+\log(2)\big]$ $\boxed{\text{C}}$: $\pi\big[1+\log(3)\big]$ $\boxed{\text{D}}$: $\pi\big[1-\log(3)\big]$
$\boxed{\text{E}}$: $\pi\big[1+2\log(2)\big]$

Punteggio: 6

---

3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri la serie di funzioni
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{n^\alpha (\log n)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette giustificando le risposte date:
(a) la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$; (b) la serie converge puntualmente in $(-\infty, 0)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$; (c) la serie converge puntualmente in $(-\infty, 0]$ per ogni $\alpha \geq 1$; (d) la serie converge uniformemente in $(-\infty, a]$ per ogni $a < 0$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$; (e) la serie converge uniformemente in $(-\infty, 0]$ se e solo se $\alpha > 1$; (f) la serie converge uniformemente in $(-\infty, 0]$ se e solo se $\alpha \geq 1$.

Punteggio: 7

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1.

Enunciare il Teorema di Green nel piano.

Applicandolo, calcolare l'area della regione di piano racchiusa dall'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1\,.$$

Punteggio: 6

Domanda 2.

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log(y^2+1) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza e l'unicità locale e globale della soluzione (*potrebbe essere utile ricordare le disuguaglianze* $a^2+b^2 \leq (a+b)^2$ *per ogni* $a, b \geq 0$ *e* $\log(1+t) \leq t$ *per ogni* $t \geq 0$);

(b) studiare la monotonia della soluzione;

(c) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza;

(d) studiare convessità/concavità della soluzione.

Punteggio: 6
