Nome, Cognome, Matricola:

Tempo a disposizione: 90 minuti

ESERCIZI

1. Dato $\alpha \in \mathbb{R}^+$, sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(7xy) - 1 + \arctan\left(\frac{49\,x^2y^2}{2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette giustificando le risposte date.

(a) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 8$, (b) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq 8$, (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ per ogni α, (d) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ se e solo se $\alpha < 8$, (e) le derivate direzionali in $(0,0)$ esistono se e solo se $\alpha \leq 7$, (f) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 7$.

Punteggio: 7

2. L'integrale doppio

$$\iint_T \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$$

dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ y \geq 0,\ y \geq x\}$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $-\frac{5}{16}\sqrt{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{5}{4}\sqrt{3}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{1}{16}\sqrt{2}$ $\boxed{\text{E}}$: $-\frac{1}{16}\sqrt{3}$

Punteggio: 6

3. Data la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$

$$f_n(x) = \sin\left(1 + \frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right), \qquad x \in [0,+\infty), \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

(a) determinare il suo insieme I di convergenza puntuale;
(b) stabilire se la successione converge uniformemente in I;
(c) stabilire se la successione $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ converge puntualmente in I;
(d) stabilire se la successione $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ converge uniformemente in I.

Punteggio: 7

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1.

Data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad a_n \in \mathbb{R},\ \ x \in \mathbb{R},$

sia R il suo raggio di convergenza e sia $0 < R < +\infty$.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date.

(a) La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge assolutamente in $[-R, R]$.

(b) Se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge puntualmente in $x = R$, allora essa converge uniformemente in $[-r, R]$ per ogni $0 < r < R$.

(c) Se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge puntualmente in $x_1 \in \mathbb{R}$, allora $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n x_1^n = 0$.

Punteggio: 6

Domanda 2.

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan(\log(y^2+1)) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

(a) discutere l'esistenza e l'unicità locale e globale della soluzione;

(b) studiare la monotonia della soluzione;

(c) studiare il comportamento asintotico della soluzione agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza;

(d) studiare convessità/concavità della soluzione.

Punteggio: 6
