
Nome, Cognome, Matricola:

ESERCIZI

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x,y) = (F+1)y\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - y\right).$$
Allora f ammette

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: un punto di massimo relativo e due punti di sella $\boxed{\text{B}}$: un punto di minimo relativo e due punti di sella $\boxed{\text{C}}$: un punto di minimo relativo, un punto di massimo relativo e un punto di sella $\boxed{\text{D}}$: due punti di minimo relativo e un punto di sella $\boxed{\text{E}}$: due punti di massimo relativo e un punto di sella

   Punteggio: 7 Risposta: A $(-1, \frac{1}{12})$ è punto di massimo; $(0,0)$, $(-\frac{3}{2}, 0)$ sono punti di sella.

---

2. Sia Γ la curva di rappresentazione parametrica
$$\vec{r}(t) = F\,t\,e^{\frac{t}{F}}\,\vec{i} + F\,e^{\frac{t}{F}}\,\vec{j} \qquad t \in [0, F].$$
L'integrale curvilineo
$$\int_\Gamma \sqrt{\left(\frac{x}{F} + y\right)^2 + \left(\frac{y}{F}\right)^2}\,ds$$
vale

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $F^3e^2 + \frac{F}{2}(\frac{F^2}{2}+1)(e^2-1)$ $\boxed{\text{B}}$: $(\frac{F^2}{2}+1)(e^2-1)$ $\boxed{\text{C}}$: F^3e^2 $\boxed{\text{D}}$: $F^2e^2 + (\frac{F^2}{2}+1)(e^2+1)$ $\boxed{\text{E}}$: $F^2e^2 - (\frac{F^2}{2}+1)(e^2-1)$ $\boxed{\text{F}}$: F^2e^2+2

   Punteggio: 6 Risposta: A

---

3. Data la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
$$f_n(x) = \frac{n\log(1+(F+1)x)}{1+n^2x^2}, \qquad x \in [0,+\infty), \quad n \in \mathbb{N},$$
   (a) determinare il suo insieme I di convergenza puntuale;
   (b) stabilire se la successione converge uniformemente in $I \cap [1,+\infty)$;
   (c) stabilire se la successione $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente in I.

   Per (b) può essere utile ricordare la maggiorazione $\log(1+x) \le x$, $\forall x \ge 0$.

   Punteggio: 7 Risposte: (a) $[0,+\infty)$ (b) SI (c) NO (non conv in $x=0$)

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1.

Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, sia R il suo raggio di convergenza, con $0 < R < +\infty$.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date.

(a) La serie converge totalmente nell'intervallo $(-R, R)$.

(b) Se la serie converge puntualmente in $x = R$, allora essa converge puntualmente anche in $x = -R$.

(c) Se la serie converge in $x = R$, allora essa converge uniformemente nell'intervallo $[-r, R]$ per ogni $0 < r < R$.

Punteggio: 6 Risposta: FFV

Domanda 2. Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e $(x_0, y_0) \in A$.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date.

(a) Se f non ammette la derivata parziale rispetto a x in (x_0, y_0) allora f non è continua in (x_0, y_0).

(b) Se vale la formula

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v} \quad \text{per ogni versore } \vec{v} \in \mathbb{R}^2$$

allora f è differenziabile in (x_0, y_0).

(c) Se f ammette le derivate parziali in un intorno di (x_0, y_0) ed esse sono continue in (x_0, y_0), allora esiste il piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Punteggio: 6 Risposta: FFV
