1. Sia $\beta > 0$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(|x|^\beta + |y|^\beta)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua in $(0,0)$ per ogni $\beta > 0$ (b) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\beta > \frac{3}{2}$ (c) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ per ogni $\beta > 2$ altrimenti $\nexists\ \nabla f(0,0)$ (d) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ per ogni $\beta > 0$ (e) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\beta > 2$ (f) f è differenziabile in $(0,0)$ per ogni $\beta > 0$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{A}$: (a), (d), (f) $\boxed{B}$: (b), (e) $\boxed{C}$: (b), (d) $\boxed{D}$: (a), (d), (e) $\boxed{E}$: (a), (f) $\boxed{F}$: (b), (c), (e)

---

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x[(x-1)^2 + y^2 - 1]$. Allora

Risp.: $\boxed{A}$: $(\frac{4}{3}, 0)$ è di massimo relativo e $(0,0)$ è di sella $\boxed{B}$: $(\frac{4}{3}, 0)$ è di minimo relativo e $(0,0)$ è di minimo relativo $\boxed{C}$: $(\frac{4}{3}, 0)$ è di minimo relativo e $(0,0)$ è di sella $\boxed{D}$: $(\frac{4}{3}, 0)$ è di sella e $(0,0)$ è di sella $\boxed{E}$: $(\frac{4}{3}, 0)$ è di massimo relativo e $(0,0)$ è di massimo relativo $\boxed{F}$: $(\frac{4}{3}, 0)$ è di sella e $(0,0)$ è di massimo relativo

---

3. Dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = (x^2+y^2)\,\vec{i} + (x^2-y^2)\,\vec{j}$, l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, dove Γ la circonferenza di centro $(0,0)$, raggio 1 percorsa in senso antiorario, vale

Risp.: $\boxed{A}$: 0 $\boxed{B}$: 1 $\boxed{C}$: 3 $\boxed{D}$: -2 $\boxed{E}$: -3 $\boxed{F}$: -1

---

4. L'area della superficie del paraboloide $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 ;\ 0 \le z \le 1\}$ vale

Risp.: $\boxed{A}$: $(3)^{3/2}\pi$ $\boxed{B}$: $\frac{2}{3}\pi(3)^{3/2}+1$ $\boxed{C}$: $\frac{2}{3}(3)^{3/2}\pi$ $\boxed{D}$: $\frac{2}{3}\pi$ $\boxed{E}$: $\frac{2}{3}\pi\left[(3)^{3/2}-1\right]$ $\boxed{F}$: 2π

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{n^2}{n^2 + (\frac{x}{7})^{2n}}\right), \quad x \in [0,+\infty[\quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente in $[0,+\infty)$ (b) f_n converge puntualmente solo in $[0,7]$ (c) f_n converge uniformemente in $[0,+\infty)$ (d) f_n non converge uniformemente in $[0,+\infty)$ (e) f_n converge uniformemente in $[0,7]$ (f) f_n converge uniformemente in $[a,+\infty)$ per ogni $a > 7$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{A}$: (a), (c), (e), (f) $\boxed{B}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{C}$: (a), (e) $\boxed{D}$: (b), (d), (e) $\boxed{E}$: (a), (d), (f) $\boxed{F}$: (a), (f)

---

6. Dato il parametro $\beta \geq 0$ si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{\Big(n! + \beta\,\log(n^2)\Big)^{1-\frac{\beta}{7}}}, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Il raggio R di convergenza della serie vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $R = +\infty$ per $0 \leq \beta < 7$, $R = 1$ per $\beta = 7$, $R = 0$ per $\beta > 7$; $\boxed{\text{B}}$: $R = +\infty$ per ogni $\beta \geq 0$; $\boxed{\text{C}}$: $R = +\infty$ per $0 \leq \beta < \log(7)$, $R = 1$ per $\beta = \log(7)$, $R = 0$ per $\beta > \log(7)$; $\boxed{\text{D}}$: $R = +\infty$ per $0 \leq \beta < 7$, $R = 1$ per $\beta \geq 7$; $\boxed{\text{E}}$: $R = 1$ per $0 \leq \beta < 7$, $R = 0$ per $\beta \geq 7$; $\boxed{\text{F}}$: $R = +\infty$ per $\beta = 0$, $R = 1$ per $\beta > 0$.