1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin(7x)\log(1+\sin^2 y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua su $\mathbb{R}^2$ (b) f non è continua in $(0,0)$ (c) $\nexists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ (d) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ (e) f è differenziabile in $(0,0)$ (f) f ammette derivate direzionali in $(0,0)$ rispetto ad ogni versore $\vec{v} = (v_1, v_2)$ e si ha $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 7v_1v_2^2$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c) $\boxed{\text{F}}$: (a), (e), (f)

---

2. Siano

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \leq x+y \leq 2 \, , 0 \leq y \leq 2\} \text{ e } g(x,y) = \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} \, .$$

Detti $M = \max_D g$ e $m = \min_D g$ si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $M = \sqrt{17}$ $\boxed{\text{B}}$: $m = 0$ e $M = \sqrt{17}$ $\boxed{\text{C}}$: $m = 0$ e $M = \sqrt{5}$ $\boxed{\text{D}}$: $m = 1$ e $M = \sqrt{5}$ $\boxed{\text{E}}$: $m = \sqrt{5}$ e $M = \sqrt{17}$ $\boxed{\text{F}}$: $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $M = \sqrt{5}$

---

3. La lunghezza della curva di rappresentazione parametrica

$$\vec{r}(t) = \cos^3 t \, \vec{i} + \sin^3 t \, \vec{j}, \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

è

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $-\frac{3}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: 0 $\boxed{\text{C}}$: 3 $\boxed{\text{D}}$: $\frac{3}{2}$ $\boxed{\text{E}}$: π $\boxed{\text{F}}$: 2π

---

4. L'integrale

$$\iiint_T [xy + xz + y^2 z] \, dxdydz$$

dove $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2 \leq z, \; 0 \leq z \leq 2\}$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 2π $\boxed{\text{B}}$: 3π $\boxed{\text{C}}$: 0 $\boxed{\text{D}}$: $-\pi$ $\boxed{\text{E}}$: π $\boxed{\text{F}}$: $\frac{\pi}{2}$

---

5. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = n \log\left(1 + \frac{2x^{2n}}{n}\right), \quad x \in [0, +\infty[, \quad n \geq 1.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente su $\mathbb{R}$ (b) f_n converge puntualmente su $[0,1)$ alla funzione identicamente nulla (c) f_n converge puntualmente su $[0,1]$ alla funzione identicamente nulla (d) f_n converge uniformemente in $[0,a]$ per ogni $a<1$ (e) f_n non converge uniformemente in $[0,1)$ (f) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1/2} f_n(x)\,dx = 2$,

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d) $\boxed{\text{F}}$: (a), (e)

---

6. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y-2}{e^y+2} \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$. Delle seguenti informazioni

(a) per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione globale definita su tutto $\mathbb{R}$, (b) le soluzioni stazionarie sono $y=2$ e $y=\log 2$, (c) per $y_0>2$ la soluzione è decrescente, (d) per ogni $y_0\in\mathbb{R}$ si ha $\lim_{x\to-\infty} y(x)=2$, (e) per $y_0>2$, si ha $\lim_{x\to+\infty} y(x)=+\infty$, (f) per $y_0<2$ la soluzione è limitata,

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (d), (f) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (b), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (d), (e)
