1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^{7\alpha} \ln(x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
delle seguenti affermazioni

(a) f è continua in $(0,0)$ per $\alpha \in \mathbb{R}^+$ (b) f ammette derivate parziali in $(0,0)$ per $\alpha \geq \frac{1}{7}$ (c) f ammette derivate parziali in $(0,0)$ per $\alpha \in \mathbb{R}^+$ (d) f è differenziabile in $(0,0)$ per $\alpha \in \mathbb{R}^+$ (e) f è differenziabile in $(0,0)$ per $\alpha > \frac{1}{7}$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{C}}$: (b), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{E}}$: (c), (e)

---

2. Data la curva Γ di rappresentazione parametrica
$$\vec{r}(t) = \frac{1-3t^2}{2}\vec{i} + 3t\vec{j} + \frac{1+3t^2}{2}\vec{k}, \qquad t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$
l'integrale curvilineo
$$\int_\Gamma \frac{1}{\left[1+2\left(\frac{y}{3}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\, ds$$
vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $2\ln 2$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{3\pi}{4}\sqrt{2}$ $\boxed{\text{C}}$: $3\sqrt{2}\ln 2$ $\boxed{\text{D}}$: 0 $\boxed{\text{E}}$: $\frac{3\pi}{2}$

---

3. L'integrale
$$\iiint_D 3z\, dxdydz$$
dove
$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \sqrt{x^2+2y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2}\right\}$$
vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $3\frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{B}}$: 3π $\boxed{\text{C}}$: 0 $\boxed{\text{D}}$: $3\frac{\pi}{8}$ $\boxed{\text{E}}$: $-\frac{3}{8}$

---

4. Sia data la successione di funzioni
$$f_n(x) = x^{2n-1}\ln\left(x^{2n}+2\right), \qquad x \in \mathbb{R}, n \geq 1.$$
Delle seguenti affermazioni

(a) l'insieme di convergenza puntuale I è $\mathbb{R}$ (b) l'insieme di convergenza puntuale I è $[-1,1]$ (c) l'insieme di convergenza puntuale I è $(-1,1)$ (d) f_n converge uniformemente su I (e) f_n converge uniformemente sugli intervalli del tipo $[-a,a] \subset I$ (f) vale il passaggio al limite sotto il segno di integrale sull'intervallo $[0,1]$.

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (d) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (f) $\boxed{\text{E}}$: (b), (e), (f)

---

5. Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan(y^2 - 4) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) per ogni y_0 esiste unica la soluzione globale. (b) per ogni $|y_0| < 2$ esiste unica la soluzione globale, per $|y_0| > 2$ esistono solo soluzioni locali. (c) non esistono soluzioni stazionarie. (d) per $-2 < y_0 < 2$ la soluzione è decrescente. (e) per $y_0 < 2$ vale $\lim_{t \to +\infty} = 0$.

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (d), $\boxed{\text{C}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{E}}$: (b), (d), (e)

SECONDA PARTE:

6. Dare la definizione di serie di funzioni uniformemente convergente.

7. Enunciare il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange.