Analisi Matematica 2 — 9 Gennaio 2020 — FOGLIO A

Cognome e Nome... Matricola ....

Firma.. Corso di Laurea: ♢ AMBLT ♢ CIVLT

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI ES. 1 - 4: Risposta esatta = +5; risposta sbagliata = −1; nessuna risposta = 0. ES. 5 - 6: punti 6.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.

1.	2.	3.	4.
A	A	A	A
B	B	B	B
C	C	C	C
D	D	D	D
E	E	E	E
F	F	F	F

---

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha y^2} - \cos(2y) + \sin(x^2)}{\sqrt{x^2+y^4}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha = 2$ (b) f è continua in $(0,0)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (c) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ non esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ (d) esiste $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ se e solo se $\alpha = 2$ (e) per $\alpha = 2$ si ha $\nabla f(0,0) = (1,0)$ (f) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha = 2$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c) $\boxed{\text{C}}$: (b), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (e), (f) $\boxed{\text{E}}$: (a), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (c), (d)

---

2. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x,y) = y + \frac{x^2}{4y} - \log x$. Dopo aver determinato i punti stazionari di f in A, allora

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: f ha due punti stazionari $P_\pm = (\pm 1, \frac{1}{2})$ che risultano essere entrambi punti di minimo relativo $\boxed{\text{B}}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (1, \frac{1}{2})$ che risulta un punto di massimo relativo $\boxed{\text{C}}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (1, \frac{1}{2})$ che risulta un punto di minimo relativo $\boxed{\text{D}}$: f ha un solo punto stazionario dato da $P = (1, \frac{1}{2})$ che risulta un punto di sella $\boxed{\text{E}}$: f ha due punti stazionari $P_\pm = (\pm 1, \frac{1}{2})$: P_+ è di minimo relativo, P_- è di massimo relativo $\boxed{\text{F}}$: f ha due punti stazionari $P_\pm = (\pm 1, \frac{1}{2})$: P_+ è di massimo relativo, P_- è di sella

---

3. Siano dati il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = \dfrac{\sqrt{y+2}}{\sqrt{x+2}}\,\vec{i} + \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{y+2}}\,\vec{j}$ e Γ la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = \cos^5 t\,\vec{i} + \sin^5 t\,\vec{j}$ con $t \in [0,\pi]$. Allora l'integrale $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\Gamma$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $-2\sqrt{6}$ $\boxed{\text{C}}$: $-2\sqrt{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $-2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ $\boxed{\text{E}}$: $2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ $\boxed{\text{F}}$: $-\sqrt{6}$

---

4. Sia dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y,z) = 2z\arctan y^2\,\vec{i} + z^2\log(x^4+1)\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Sia $\mathcal{S}$ la superficie chiusa che è frontiera del solido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le z \le 2 - x^2 - y^2\}$ e sia $\vec{n}$ il versore normale uscente da $\mathcal{S}$. Allora $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: π $\boxed{\text{B}}$: $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: 1 $\boxed{\text{D}}$: 2 $\boxed{\text{E}}$: 2π $\boxed{\text{F}}$: $\frac{\pi}{3}$

---

5. Sia $\alpha > 0$ e sia data la serie di funzioni
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(1 + \dfrac{e^x}{n^\alpha} - \log\left(1 + \dfrac{e^x}{n^\alpha}\right) - \cos\left(\dfrac{e^x}{n^\alpha}\right)\right)^2}{\log(n)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
   (a) Determinare, al variare di $\alpha > 0$, il suo insieme di convergenza puntuale.
   (b) Per $\alpha > \frac{1}{4}$ stabilire se la serie di funzioni
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{4x}}{n^{4\alpha}\log(n)}$$
   converge totalmente in $\mathbb{R}$ o in suoi sottoinsiemi.

---

6. Si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2-4}{t^2+1} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$
Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:
   (a) discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza e di unicità locale e globale della soluzione;
   (b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione.
   (c) Nel caso $y_0 = 0$ studiare l'eventuale simmetria della soluzione e studiarne la concavità e convessità.
   (d) Nel caso $y_0 < 2$ stabilire se l'intervallo massimale di esistenza è illimitato a destra.
