1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{\arctan(x^3)}{(x^2+y^2)^{\alpha-1}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua su $\mathbb{R}^2$ per $\alpha < \frac{5}{2}$ (b) f ammette derivate parziali in $(0,0)$ per $\alpha \leq 2$ (c) f ammette derivate parziali in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 2$ (d) f è differenziabile in $(0,0)$ per $\alpha \leq 2$ (e) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 2$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (b), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (c) $\boxed{\text{D}}$: (b) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (e)

---

2. Sia $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da

$$\vec{F}(x,y) = (e^x(\sin x + \cos y) + e^x \cos x + \sin y)\,\vec{\imath} + (1 + x\cos y - e^x \sin y)\,\vec{\jmath}.$$

Sia Γ la semicirconferenza di centro $(0, \pi/2)$, raggio $\pi/2$ e ascisse positive percorsa in senso antiorario. Allora l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\Gamma$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 0 $\boxed{\text{B}}$: $2 - \pi$ $\boxed{\text{C}}$: $\pi - 1$ $\boxed{\text{D}}$: $\pi - 2$ $\boxed{\text{E}}$: $1 - \pi$

---

3. Sia S la superficie data da

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = \sqrt{x^2+y^2},\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Allora $\displaystyle\iint_s z dS$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 0 $\boxed{\text{B}}$: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\boxed{\text{C}}$: $\sqrt{2}\,\pi$ $\boxed{\text{D}}$: $-\sqrt{2}\,\pi$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{2\sqrt{2}\,\pi}{3}$

---

4. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = e^{\left(\frac{x}{7}\right)^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f_n converge puntualmente a $f(x) = 1$ in $]-\infty, 7[$ (b) f_n converge puntualmente in $[-7, 7]$ (c) f_n converge uniformemente in $]-7, 7[$ (d) f_n converge uniformemente solo sui sottointervalli del tipo $[-a, a]$ per qualsiasi $0 < a < 7$ (e) in qualunque sottointervallo di $\mathbb{R}$ f_n non converge uniformemente

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (b), (d) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c) $\boxed{\text{C}}$: (b), (e) $\boxed{\text{D}}$: (b) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e)

---

5. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-2)\arctan^2(y-2) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) Per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ esiste unica la soluzione locale, ma non globale. (b) Per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ esiste unica la soluzione globale su tutto $\mathbb{R}$. (c) Per $y_0 = 2$ la soluzione è l'unica soluzione stazionaria $y = 2$. (d) Per $y_0 < 2$ la soluzione è crescente e $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 2$ (e) Per $y_0 > 2$ la soluzione è strettamente crescente e convessa.

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d) $\boxed{\text{C}}$: (b), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{E}}$: (b), (c), (e)

SECONDA PARTE:

6. Scrivere l' enunciato del Teorema Test della matrice Hessiana per una funzione di n variabili.

7. Scrivere l' enunciato del Teorema della divergenza di Gauss.