Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un “SI” vicino alla risposta scelta.
3. PUNTEGGI: risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −1; risposta non data = 0.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. Per $\alpha > 0$ si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n^\alpha$ dove $a_n^\alpha = \int_n^{n+1} \frac{dx}{(x^4+7)^\alpha}$. Allora

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: la serie converge semplicemente (ma non assolutamente) se e solo se $0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$ e converge assolutamente se e solo se $\alpha > \frac{1}{4}$ $\boxed{\text{B}}$: la serie converge semplicemente (ma non assolutamente) se e solo se $\alpha \geq \frac{1}{4}$ e converge assolutamente se e solo se $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ $\boxed{\text{C}}$: la serie converge semplicemente (ma non assolutamente) se e solo se $\alpha > \frac{1}{4}$ e converge assolutamente se e solo se $0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$ $\boxed{\text{D}}$: $\forall\alpha > 0$ la serie converge semplicemente ma non assolutamente $\boxed{\text{E}}$: $\forall\alpha > 0$ la serie converge assolutamente $\boxed{\text{F}}$: la serie converge semplicemente (ma non assolutamente) se e solo se $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ e converge assolutamente se e solo se $\alpha \geq \frac{1}{4}$

2. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} x + \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha & |x| < n \\ n^\beta & |x| \geq n \end{cases}$$

   con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia f il limite puntuale di f_n. Allora

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $f_n \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}$ se e solo se $\beta \leq 0$ $\boxed{\text{B}}$: $f_n \to f$ puntualmente ma non uniformemente su $\mathbb{R}$ per ogni α, β $\boxed{\text{C}}$: $f_n \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}$ per ogni α, β $\boxed{\text{D}}$: $f_n \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}$ se e solo se $\beta < 0$ $\boxed{\text{E}}$: $f_n \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}$ se e solo se $\beta < 0$ e $\alpha > 0$ $\boxed{\text{F}}$: $f_n \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}$ se e solo se $\beta \leq 0$ e $\alpha > 0$.

3. Per $\alpha > 0$ sia $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica definita da

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} (-x)^\alpha & \text{se } -\pi \le x < 0 \\ x^4 & \text{se } 0 \le x < \pi \end{cases}$$

Allora

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\forall \alpha \ge 1$ la serie di Fourier di f_α converge a f_α uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: esiste $\alpha \ge 1$ tale che la serie di Fourier di f_α non converge uniformemente in $[-\pi/2, \pi/2]$ $\boxed{\text{C}}$: esiste $\alpha > 0$ tale che la serie di Fourier di f_α non converge in media quadratica $\boxed{\text{D}}$: $\forall \alpha > 0$ la serie di Fourier di f_α non converge in media quadratica $\boxed{\text{E}}$: esiste $\alpha > 0$ tale che la serie di Fourier di f_α converge ad f_α uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: per ogni $\alpha \ge 1$ la serie di Fourier di f_α converge a f_α puntualmente in $\mathbb{R}$

---

4. Calcolare la funzione la cui trasformata di Laplace soddisfa $s\mathcal{L}[u] - 1 = \frac{d}{ds}\left(\frac{2s}{s^2+4}\right)$.

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{3}{2} - x\sin(2x) + \frac{\cos(2x)}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $-x\sin(2x) - \frac{\cos(2x)}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{3}{2} + x\sin(2x) + \frac{\cos(2x)}{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{3}{2} + x\sin(2x) - \frac{\cos(2x)}{2}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{3}{2} - x\sin(2x)$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{3}{2} - x\sin(2x) - \frac{\cos(2x)}{2}$

---

5. Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y+1)^2 y \sin y \\ y(0) = 1/n \end{cases}$$

e sia $y_n : I \to \mathbb{R}$ la sua soluzione massimale. Delle seguenti affermazioni

(a) $I = \mathbb{R}$ (b) y_n è pari (c) y_n è dispari (d) y_n è limitata (e) $\lim_{t\to+\infty} y_n(t) = \pi$ (f) $y_n \to 0$ uniformemente su I per $n \to +\infty$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (b), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (d), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (d)

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + 2y'' + y' = t \\ y(0) = 7 \\ y'(0) = -9 \\ y''(0) = 8 \end{cases}$$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $7e^t$ $\boxed{\text{B}}$: $7\cos t + \frac{t^2}{2} - 2t$ $\boxed{\text{C}}$: $7\cos t + \frac{t^2}{2} + 2t$ $\boxed{\text{D}}$: $7e^{-t} + \frac{t^2}{2} - 2t$ $\boxed{\text{E}}$: $7e^t + \frac{t^2}{2} + 2t$ $\boxed{\text{F}}$: $7e^{-t} + t$

---

7. Data $g(x) = (4 - x^2)\chi_{[-2,2]}(x)$, sia $f_n(x) = g(x - 4n)$ e si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Allora delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge puntualmente ma non totalmente in $\mathbb{R}$ (b) la serie converge totalmente in $[0, +\infty[$ (c) la somma della serie non è continua in $\mathbb{R}$ (d) la somma della serie è integrabile in $[-10, 10]$ (e) la serie converge totalmente su ogni intervallo limitato in $\mathbb{R}$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e) $\boxed{\text{F}}$: (a), (b), (d)

---

8. Sia data la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}(\alpha+1)^n z^n$ con $\alpha > 0$ e $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Allora la serie converge per qualche x, y tale che $y = -x + 1$ se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\forall \alpha > 0$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha \leq \sqrt{2} - 1$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha < \sqrt{2} - 1$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha > \sqrt{2} - 1$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha \geq \sqrt{2} - 1$ $\boxed{\text{F}}$: per nessun α

---

1. Per $\alpha > 0$ si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n^\alpha$ dove $a_n^\alpha = \int_n^{n+1} \frac{dx}{(x^4+7)^\alpha}$. Allora

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: la serie converge semplicemente (ma non assolutamente) se e solo se $0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$ e converge assolutamente se e solo se $\alpha > \frac{1}{4}$ $\boxed{\text{B}}$: la serie converge semplicemente (ma non assolutamente) se e solo se $\alpha \geq \frac{1}{4}$ e converge assolutamente se e solo se $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ $\boxed{\text{C}}$: la serie converge semplicemente (ma non assolutamente) se e solo se $\alpha > \frac{1}{4}$ e converge assolutamente se e solo se $0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$ $\boxed{\text{D}}$: $\forall\alpha > 0$ la serie converge semplicemente ma non assolutamente $\boxed{\text{E}}$: $\forall\alpha > 0$ la serie converge assolutamente $\boxed{\text{F}}$: la serie converge semplicemente (ma non assolutamente) se e solo se $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ e converge assolutamente se e solo se $\alpha \geq \frac{1}{4}$

2. Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} x + \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha & |x| < n \\ n^\beta & |x| \geq n \end{cases}$$

   con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia f il limite puntuale di f_n. Allora

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $f_n \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}$ se e solo se $\beta \leq 0$ $\boxed{\text{B}}$: $f_n \to f$ puntualmente ma non uniformemente su $\mathbb{R}$ per ogni α, β $\boxed{\text{C}}$: $f_n \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}$ per ogni α, β $\boxed{\text{D}}$: $f_n \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}$ se e solo se $\beta < 0$ $\boxed{\text{E}}$: $f_n \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}$ se e solo se $\beta < 0$ e $\alpha > 0$ $\boxed{\text{F}}$: $f_n \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}$ se e solo se $\beta \leq 0$ e $\alpha > 0$.

3. Per $\alpha > 0$ sia $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica definita da

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} (-x)^\alpha & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ x^4 & \text{se } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

   Allora

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\forall\alpha \geq 1$ la serie di Fourier di f_α converge a f_α uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{B}}$: esiste $\alpha \geq 1$ tale che la serie di Fourier di f_α non converge uniformemente in $[-\pi/2, \pi/2]$ $\boxed{\text{C}}$: esiste $\alpha > 0$ tale che la serie di Fourier di f_α non converge in media quadratica $\boxed{\text{D}}$: $\forall\alpha > 0$ la serie di Fourier di f_α non converge in media quadratica $\boxed{\text{E}}$: esiste $\alpha > 0$ tale che la serie di Fourier di f_α converge ad f_α uniformemente in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{F}}$: per ogni $\alpha \geq 1$ la serie di Fourier di f_α converge a f_α puntualmente in $\mathbb{R}$

4. Calcolare la funzione la cui trasformata di Laplace soddisfa $s\mathcal{L}[u] - 1 = \frac{d}{ds}\left(\frac{2s}{s^2+4}\right)$.

   Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{3}{2} - x\sin(2x) + \frac{\cos(2x)}{2}$ $\boxed{\text{B}}$: $-x\sin(2x) - \frac{\cos(2x)}{2}$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{3}{2} + x\sin(2x) + \frac{\cos(2x)}{2}$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{3}{2} + x\sin(2x) - \frac{\cos(2x)}{2}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{3}{2} - x\sin(2x)$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{3}{2} - x\sin(2x) - \frac{\cos(2x)}{2}$

5. Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y+1)^2 y \sin y \\ y(0) = 1/n \end{cases}$$

e sia $y_n : I \to \mathbb{R}$ la sua soluzione massimale. Delle seguenti affermazioni

(a) $I = \mathbb{R}$ (b) y_n è pari (c) y_n è dispari (d) y_n è limitata (e) $\lim_{t\to+\infty} y_n(t) = \pi$ (f) $y_n \to 0$ uniformemente su I per $n \to +\infty$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (e) $\boxed{\text{B}}$: (a), (c), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{D}}$: (a), (b), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (d), (e), (f) $\boxed{\text{F}}$: (a), (d)

---

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + 2y'' + y' = t \\ y(0) = 7 \\ y'(0) = -9 \\ y''(0) = 8 \end{cases}$$

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $7e^t$ $\boxed{\text{B}}$: $7\cos t + \frac{t^2}{2} - 2t$ $\boxed{\text{C}}$: $7\cos t + \frac{t^2}{2} + 2t$ $\boxed{\text{D}}$: $7e^{-t} + \frac{t^2}{2} - 2t$ $\boxed{\text{E}}$: $7e^t + \frac{t^2}{2} + 2t$ $\boxed{\text{F}}$: $7e^{-t} + t$

---

7. Data $g(x) = (4 - x^2)\chi_{[-2,2]}(x)$, sia $f_n(x) = g(x - 4n)$ e si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Allora delle seguenti affermazioni

(a) la serie converge puntualmente ma non totalmente in $\mathbb{R}$ (b) la serie converge totalmente in $[0, +\infty[$ (c) la somma della serie non è continua in $\mathbb{R}$ (d) la somma della serie è integrabile in $[-10, 10]$ (e) la serie converge totalmente su ogni intervallo limitato in $\mathbb{R}$

le uniche corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (e) $\boxed{\text{C}}$: (a) $\boxed{\text{D}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (e) $\boxed{\text{F}}$: (a), (b), (d)

---

8. Sia data la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}(\alpha+1)^n z^n$ con $\alpha > 0$ e $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Allora la serie converge per qualche x, y tale che $y = -x + 1$ se e solo se

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\forall \alpha > 0$ $\boxed{\text{B}}$: $\alpha \le \sqrt{2} - 1$ $\boxed{\text{C}}$: $\alpha < \sqrt{2} - 1$ $\boxed{\text{D}}$: $\alpha > \sqrt{2} - 1$ $\boxed{\text{E}}$: $\alpha \ge \sqrt{2} - 1$ $\boxed{\text{F}}$: per nessun α
