Cognome e Nome... Matricola ....

Firma... Corso di Laurea: ♢ AMBLT ♢ CIVLT

Istruzioni

1. COMPILARE la parte soprastante. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra le corrispondenti righe punteggiate.
2. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, smartphone. TEMPO TOTALE a disposizione: 150 min.
3. SEGNARE nella tabella riportata in questa pagina, in modo incontrovertibile, la lettera corrispondente alla risposta scelta per ognuna delle domande; in caso di correzione, apporre un "SI" vicino alla risposta scelta.
4. PUNTEGGI ES. 1 - 4: Risposta esatta = +5; risposta sbagliata = −1; nessuna risposta = 0. ES. 5 - 6: punti 6.
5. CONSEGNARE il foglio A e TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.

1.	2.	3.	4.
A	A	A	A
B	B	B	B
C	C	C	C
D	D	D	D
E	E	E	E
F	F	F	F

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2) - 2\arctan(xy^2)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{3\alpha}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{3}$ (b) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{2}{3}$ (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ esiste se e solo se $\alpha \leq \frac{1}{3}$ (d) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ esiste per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (e) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{1}{3}$ (f) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{2}{3}$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (e) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (b), (e), (f) $\boxed{\text{D}}$: (a), (d), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (c), (d) $\boxed{\text{F}}$: (b), (d), (e)

2. Siano T il dominio $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$ e $g(x,y) = (x-1)^2 + y^2 + 1$. Detti $M = \max_T g$ e $m = \min_T g$, si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = \frac{5}{3}$ e $M = 2$ $\boxed{\text{B}}$: $m = 2$ e $M = 10$ $\boxed{\text{C}}$: $m = \frac{5}{3}$ e $M = 10$ $\boxed{\text{D}}$: $m = 3$ e $M = 10$ $\boxed{\text{E}}$: $m = 2$ e $M = 3$ $\boxed{\text{F}}$: $m = \frac{5}{3}$ e $M = 3$

3. L'integrale $\displaystyle\int_\Gamma \left(\frac{2}{3}x + 4z\right)\, \mathrm{d}s$, dove Γ è la curva di rappresentazione parametrica $\vec{r}(t) = 3t\,\vec{i} + \dfrac{3t^2}{2}\,\vec{j} + t^3\vec{k}$, $t \in [0,1]$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $3^{3/2} - 1$ $\boxed{\text{B}}$: $2(3^{1/2} - 1)$ $\boxed{\text{C}}$: $3^{1/2} - 1$ $\boxed{\text{D}}$: $2(3^{3/2} - 1)$ $\boxed{\text{E}}$: $3(3^{3/2} - 1)$ $\boxed{\text{F}}$: $3(3^{1/2} - 1)$

---

4. L'integrale triplo $\displaystyle\iiint_E \exp\left((x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\right)\, dxdydz$, dove $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{4\pi}{3}(e-2)$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{4\pi}{3}(e-1)$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{\pi}{3}(e-1)$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{\pi}{2}(e-1)$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{3\pi}{2}(e-2)$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{\pi}{2}(e-2)$

---

5. Data la successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$f_n(x) = 2xe^{(x^2-1)n} + x^{2n+1}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

   (a) determinare il suo insieme I di convergenza puntuale;
   (b) stabilire se la successione converge uniformemente in I o in suoi sottoinsiemi.
   (c) stabilire se vale il passaggio al limite sotto il segno di integrale sull'insieme $I \cap \{x \geq 0\}$.

---

6. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log(y^2+1) - 7 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

   Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$:

   (a) discutere l'esistenza ed unicità locale e globale della soluzione (*può essere utile osservare che* $\log(x^2+1) \leq |x|$, *per ogni* $x \in \mathbb{R}$);
   (b) determinare le soluzioni stazionarie e studiare la monotonia della soluzione;
   (c) studiare il comportamento asintotico della soluzione all'estremo destro dell'intervallo massimale di esistenza;
   (d) studiare la concavità/convessità della soluzione.
